

8. Golden R. M., Kaiser J. F., Design of Wideband Sampled Data Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 43, No. 4, 1533—1546, Part 2 (July 1964).
9. Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, N. Y., 1962.
10. Storer J. E., *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill, N. Y., 1957.
11. Thiran J. P., Recursive Digital Filters with Maximally Flat Group Delay, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 659—663 (Nov. 1971).
12. Thiran J. P., Equal-Ripple Delay Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 664—667 (Nov. 1971).
13. Fettweis A., A Simple Design of Maximally Flat Delay Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 2, 112—114 (June 1972).
14. Daniels R. W., *Approximation Methods for the Design of Passive, Active, and Digital Filters*, McGraw-Hill, 1974.

Частотные преобразования

1. Weinberg L., *Network Analysis and Synthesis*, McGraw-Hill, N. Y., 1962.
2. Constantinides A. G., Spectral Transformation for Digital Filters, *Proc. IEE*, 117, No. 8, 1585—1590 (1970).

Методы проектирования во временной области

1. Burrus C. S., Parks T. W., Time Domain Design of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. Audio.*, 18, 137—141 (1970).
2. Shanks J. L., Recursion Filters for Digital Processing, *Geophys.*, 32, 33—51 (Feb. 1967).
3. Brophy F., Salazar A. C., Considerations of the Padé Approximant Technique in the Synthesis of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 6, 500—505 (Dec. 1973).
4. Evans A. G., Fischl R., Optimal Least Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 1, 61—65 (Feb. 1973).
5. Brophy F., Salazar A. C., Recursive Digital Filter Synthesis in the Time Domain, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-22, No. 1, 45—55 (Feb. 1974).

Методы оптимизации

1. Steiglitz K., Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 18, 123—129 (1970).
2. Deczky A. G., Synthesis of Recursive Digital Filters using the Minimum P-Error Criterion, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 4, 257—263 (Oct. 1972).
3. Helms H. D., Digital Filters with Equiripple or Minimax Responses, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 19, No. 1, 87—94 (1971).
4. Deczky A., Computer Aided Synthesis of Digital Filters in the Frequency Domain, ScD. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, Switzerland, 1973.
5. Bandler J. W., Bardakjian B. J., Least pth Optimization of Recursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 5, 460—470 (Oct. 1973).
6. Thajchayapong P., Rayner P. J., Recursive Digital Filter Design by Linear Programming, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 2, 107—112 (April 1973).
7. Rabiner L. R., Graham N.Y., Helms H. D., Linear Programming Design of IIR Digital Filters with Arbitrary Magnitude Function, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-22, No. 2, 117—123 (April 1974).
8. Fletcher R., Powell M. J. D., A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, *Computer J.*, 6, No. 2, 163—168 (1963).

ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

5.1. Введение

Во всех предыдущих главах при рассмотрении цифровых фильтров предполагалось, что и коэффициенты фильтров, и переменные представляются с неограниченной точностью. Для того чтобы понять, какими свойствами будет обладать реальный фильтр, построенный в виде специализированного устройства или на базе ЦВМ, необходимо учесть эффекты, вызванные конечной разрядностью всех используемых регистров. К таким эффектам относятся:

1. Шум аналого-цифрового преобразования.
2. Некоррелированный шум округления.
3. Погрешности характеристик фильтров, обусловленные квантованием коэффициентов фильтров.
4. Коррелированный шум округления, проявляющийся в виде предельных циклов.

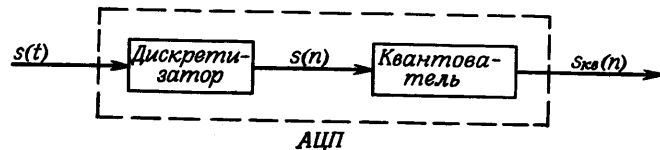
Учитывая методы представления чисел в фильтре, способы квантования, используемые для сокращения разрядности чисел до нужной величины, а также особенности структурной схемы фильтра, в каждом конкретном случае можно оценить, как перечисленные эффекты скажутся на характеристиках фильтра. В этой главе каждый из этих эффектов рассмотрен в общем виде и дан детальный анализ некоторых частных случаев.

Можно указать на несколько серьезных причин, по которым целесообразно подробно рассмотреть лишь некоторые частные случаи. Одна из них состоит в том, что число возможных комбинаций методов представления чисел, способов квантования и структур фильтра весьма велико (например, если каждый из перечисленных факторов имеет соответственно 5, 3 и 9 вариантов, то общее число комбинаций будет равно 135). Вторая причина состоит в том, что многие из возможных вариантов представляют чисто теоретический интерес, так как они никогда не используются в реальных системах. Так, например, обычно стараются не использовать представления чисел в прямом коде (с модулем и знаком), поскольку при выполнении простых операций типа сложения возникают характерные для такого представления трудности.

5.2. Аналого-цифровое преобразование

Одним из наиболее важных способов формирования последовательности является дискретизация непрерывного колебания. Устройство, предназначенное для преобразования непрерывного колебания в последовательность отсчетов, каждый из которых является аппроксимацией соответствующего отсчета входного колебания, называется аналого-цифровым преобразователем (АЦП). На фиг. 5.1 приведена блок-схема АЦП, работу которого можно представить в виде двухэтапного процесса. На первом этапе формируется последовательность $s(n) = s(t)|_{t=nT}$, в которой отсчеты $s(n)$ представлены с неограниченной точностью. На втором этапе значение каждого отсчета $s(n)$ представляется числом, состоящим из конечного числа двоичных разрядов. В результате получается новая последовательность $s_{кв}(n)$. В реальных АЦП обе операции выполняются совместно, т. е. имеется единый блок, на вход которого поступает колебание $s(t)$, а на выходе формируется последовательность $s_{кв}(n)$. Разность $e(n) = s(n) - s_{кв}(n)$ называется шумом квантования или шумом аналого-цифрового преобразования.

Как было отмечено в гл. 2, полоса входного колебания должна быть ограничена, так как иначе последовательность $s_{кв}(n)$ не будет однозначно представлять $s(t)$. Поэтому аналого-цифровому преобразователю обычно предшествует аналоговый фильтр нижних частот¹⁾. Желательно, чтобы в полосе сигнала характерис-

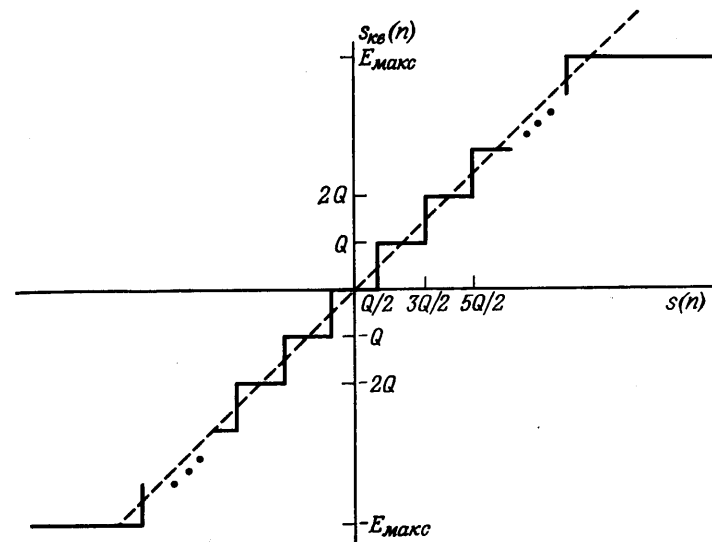


Фиг. 5.1. Блок-схема аналого-цифрового преобразователя.

тика фильтра имела минимальные пульсации, а подавление составляющих с частотой, превышающей половину частоты дискретизации, составляло не менее 40 дБ. Опыт показывает, что для обработки речевых сигналов достаточно использовать фильтр восьмого порядка (с крутизной спада характеристики 48 дБ на октаву).

В зависимости от особенностей метода квантования последовательности $s(n)$ шум квантования может иметь то или иное амплитудное распределение. Если наименьший шаг квантования равен Q , то взаимосвязь между $s_{кв}(n)$ и $s(n)$ для случая округления

¹⁾ Очевидно, что с тем же успехом можно использовать и полосовой фильтр с нижней частотой среза, кратной частоте дискретизации АЦП. — Прим. ред.



Фиг. 5.2. Характеристика квантователя при использовании округления.

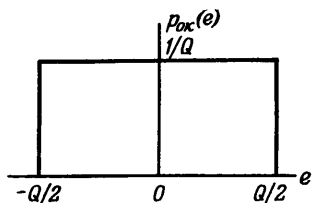
будет описываться характеристикой фиг. 5.2. Поскольку число уровней квантования конечно, все отсчеты, выходящие за максимальный ($E_{макс}$) или минимальный ($E_{мин}$) уровень, округляются до этих значений. Обычно такого ограничения сигнала сверху и снизу стараются избежать путем соответствующего выбора шага квантования Q и уровня входного аналогового сигнала. Из фиг. 5.2 видно, что сигнал ошибки удовлетворяет (за исключением случаев превышения предельных уровней) соотношению

$$-\frac{Q}{2} \leq e(n) \leq \frac{Q}{2} \quad (5.1)$$

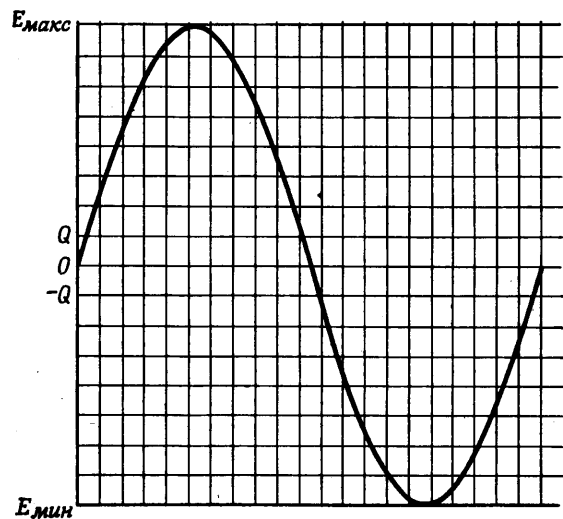
при любых n . Используя достаточно общие предположения, можно показать, что распределение сигнала ошибки является равномерным. На фиг. 5.3 представлен график плотности вероятности ошибки квантования при округлении.

На фиг. 5.4 процесс округления в АЦП иллюстрируется на примере дискретизации аналогового синусоидального колебания $s(t)$. В нижней части фиг. 5.4 представлены (в увеличенном масштабе) ошибки квантования каждого из отсчетов. Как и ожидалось, последовательность, представляющая ошибку, имеет случайный характер.

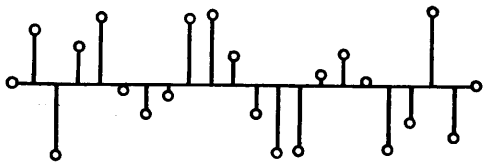
При получении отсчетов $s_{кв}(n)$ могут быть использованы и другие способы квантования. Так, при усечении в качестве отсчета сигнала используется ближайший меньший уровень квантования.



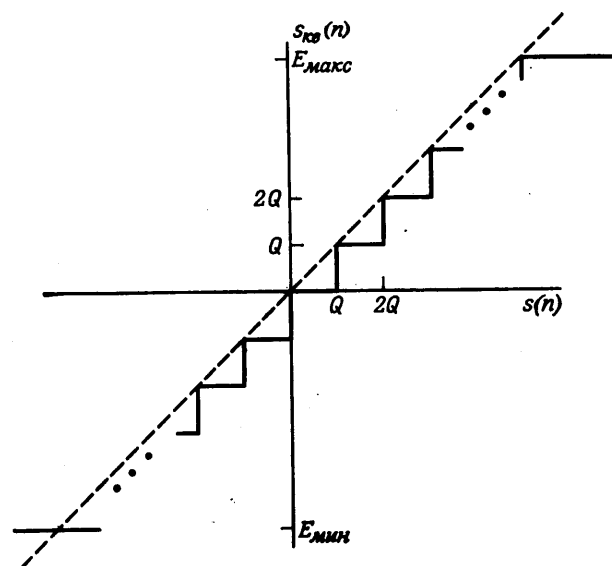
Фиг. 5.3. Плотность вероятности ошибки квантования при округлении.



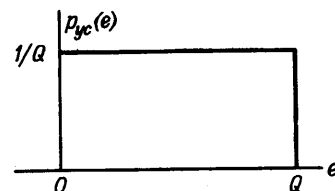
Ошибка квантования



Фиг. 5.4. Ошибка квантования синусоидального сигнала.



Фиг. 5.5. Характеристика квантователя при использовании усечения.

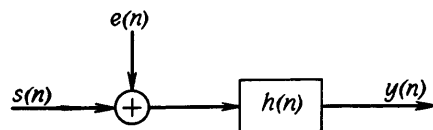


Фиг. 5.6. Плотность вероятности ошибки усечения.

На фиг. 5.5 графически представлено соотношение между $s_{кв}(n)$ и $s(n)$ при усечении. Поскольку результат усечения равен результату округления, уменьшенному на половину шага квантования, то график плотности вероятности сигнала ошибки будет таким, как показано на фиг. 5.6.

Из фиг. 5.3 и 5.6 видно, что ошибка квантования имеет среднее значение, равное нулю при округлении и $Q/2$ при усечении, а ее дисперсия в обоих случаях равна $Q^2/12$.

При цифровой обработке сигналов часто применяется еще один способ квантования, называемый усечением при представлении отсчетов в прямом коде (с использованием величины и знака). При положительных значениях отсчетов сигнала этот способ идентичен усечению. Отрицательные же отсчеты заменяются на ближайший больший уровень квантования. Таким образом, в зависимо-



Фиг. 5.7. Линейная модель учета шума квантования в ЛПП-системе.

сти от знака $s_{кв}(n)$ используется либо распределение ошибки квантования, представленное на фиг. 5.6, либо его зеркальное отображение. При этом среднее значение ошибки квантования будет равно нулю, но дисперсия ошибки будет равна $Q^2/3$, т. е. вчетверо больше, чем при усечении или округлении. С учетом приведенных статистических характеристик из всех возможных методов квантования на практике предпочитают использовать округление.

Получив общее представление о механизме аналого-цифрового преобразования и о распределении шума квантования, можно сделать вывод, что каждый отсчет квантованного сигнала на входе цифровой системы с импульсной характеристикой $h(n)$ равен сумме неквантованного отсчета $s(n)$ и ошибки квантования $e(n)$ (фиг. 5.7). Пользуясь свойством линейности системы, можно прохождение последовательностей $s(n)$ и $e(n)$ рассматривать независимо, а выходную последовательность представить в виде

$$y(n) = \underbrace{s(n) * h(n)}_{\text{сигнал}} + \underbrace{e(n) * h(n)}_{\text{шум}} \quad (5.2)$$

(предполагается, что обработка выполняется с неограниченной точностью). Таким способом можно найти сигнал и шум на выходе фильтра и вычислить отношение сигнал/шум после обработки. Конечно, обработка в цифровом фильтре производится с конечной точностью, так что сказанное выше нужно уточнять. Тем не менее представление квантованного сигнала в виде суммы неквантованного сигнала и шума квантования является одним из важнейших приемов при изучении эффектов конечной разрядности чисел.

Прежде чем перейти к анализу различных систем счисления, используемых при построении цифровых фильтров, целесообразно подчеркнуть одно важное положение, относящееся к шуму квантования в АЦП. Любые аналоговые сигналы всегда сопровождаются шумом того или иного вида, т. е. обрабатываемая реализация имеет конечное отношение сигнал/шум. Например, при передаче речевого сигнала по обычной телефонной линии отношение сигнал/шум составляет около 36 дБ, так что никакое увеличение разрядности не позволит получить в дискретизованном сигнале отношение сигнал/шум, большее, чем в исходном аналоговом сигнале. Действительно, если шаг квантования Q значительно меньше амплитуды сигнала, младшие разряды отсчетов последо-

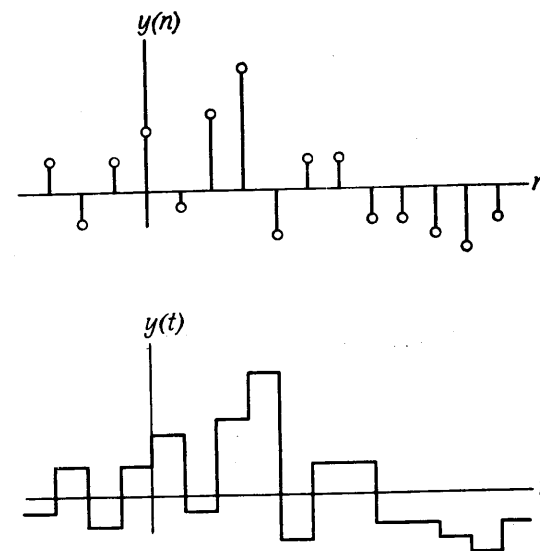
вательности будут всего лишь более точно описывать шум, сопровождающий аналоговый сигнал. Отсюда следует, что увеличение числа разрядов АЦП сверх некоторой величины приводит лишь к увеличению точности представления входного аналогового шума. Итак, разрядность АЦП определяется характером преобразуемого сигнала.

5.3. Цифро-аналоговое преобразование

Цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) представляет собой устройство, служащее для преобразования последовательности $y(n)$ в аналоговое колебание $y(t)$ вида

$$y(t) = \sum_n y(n) h(t - nT), \quad (5.3)$$

причем вид функции $h(t)$ определяется видом цифро-аналогового преобразователя. Одной из наиболее распространенных интерполирующих функций $h(t)$ является прямоугольный импульс длительностью T секунд. Такие ЦАП обычно называют цифро-аналоговыми преобразователями с интерполятором нулевого порядка. На фиг. 5.8 изображены типичная последовательность $y(n)$ и аналоговый сигнал $y(t)$ на выходе ЦАП с интерполятором нулевого



Фиг. 5.8. Входной и выходной сигналы ЦАП с интерполятором нулевого порядка.

порядка, рассчитанный по формуле (5.3). Ясно, что выходное аналоговое колебание $y(t)$ содержит большое количество нежелательных высокочастотных составляющих. Для их подавления после ЦАП обычно включают аналоговый линейный фильтр нижних частот с постоянными параметрами и частотой среза не выше $1/(2T)$ Гц, где $1/T$ — частота дискретизации. Такой фильтр называют выходным, а комбинацию из ЦАП и выходного фильтра — восстанавливающим фильтром.

Цифро-аналоговое преобразование в принципе позволяет без ошибки восстановить аналоговое колебание, эквивалентное (в некотором смысле) входной последовательности ЦАП. Из формулы (5.3), однако, следует, что $Y(\omega)$, спектр выходного колебания $y(t)$, не будет совпадать в полосе $0 \leq f \leq 1/(2T)$ со спектром $Y_D(e^{j\omega})$ входной последовательности $y(n)$, так как $Y(\omega)$ и $Y_D(e^{j\omega})$ связаны соотношением

$$Y(\omega) = Y_D(e^{j\omega}) H(\omega), \quad (5.4)$$

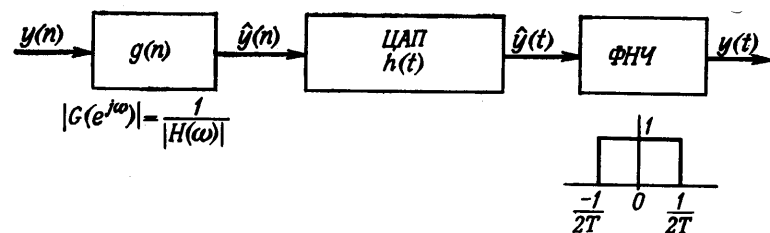
где $H(\omega)$ — спектр $h(t)$. Для интерполятора нулевого порядка

$$|H(\omega)| = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} \quad (5.5)$$

Чтобы скомпенсировать искажение спектра, вносимое неравномерностью частотной характеристики ЦАП, последовательность $y(n)$ часто предварительно пропускают через цифровой фильтр, амплитудная характеристика которого аппроксимирует функцию

$$|G(e^{j\omega})| = \frac{\omega}{2 \sin(\omega T/2)} = \frac{1}{|H(\omega)|}. \quad (5.6)$$

Таким образом, последовательное соединение устройств с характеристиками $G(e^{j\omega})$ и $H(\omega)$ в целом обеспечивает равномерную частотную характеристику. На фиг. 5.9 показаны все операции, необходимые для перехода от последовательности $y(n)$ к аналоговому колебанию $y(t)$ со спектром, эквивалентным в полосе



Фиг. 5.9. Блок-схема цифро-аналогового преобразователя с компенсацией частотной характеристики.

$-1/(2T) \leq f \leq 1/(2T)$ спектру исходной последовательности. Следует иметь в виду, что цифровой компенсирующий фильтр, показанный на фиг. 5.9, не обязательно выполнять в виде отдельного устройства; его можно включить в состав самой системы цифровой обработки.

5.4. Системы счисления, применяемые в цифровых устройствах

Как уже упоминалось, в цифровых устройствах используются самые разнообразные системы счисления. Одними из наиболее распространенных являются системы с фиксированной и плавающей запятой. Недавно разработана гибридная система, занимающая промежуточное положение между ними; она была названа системой счисления с поблочно плавающей запятой. Хотя могут использоваться и другие системы счисления, при изучении эффектов, связанных с конечной разрядностью чисел, будут рассматриваться только эти три наиболее распространенные системы. Некоторые результаты, которые будут приведены в данной главе, можно непосредственно распространить и на многие еще разрабатываемые системы счисления.

5.5. Система счисления с фиксированной запятой

В данной главе принято, что для представления чисел в цифровом фильтре используются b двоичных разрядов. С их помощью можно точно представить 2^b различных b -разрядных чисел. В системе счисления с фиксированной запятой считается, что положение двоичной запятой фиксировано. Разряды справа от запятой дают дробную часть числа, а слева от нее — целую часть. Так, двоичное число 01,01100 равно $(0 \times 2^4) + (1 \times 2^0) + (0 \times 2^{-1}) + (1 \times 2^{-2}) + (1 \times 2^{-3}) + (0 \times 2^{-4}) + (0 \times 2^{-5})$, или 1,375 в десятичной системе.

В зависимости от способа представления отрицательных чисел различают три вида системы счисления с фиксированной запятой. Числа могут быть представлены в прямом, дополнительном и обратном кодах. При использовании прямого кода старший разряд является знаковым (0 соответствует знаку +, 1 — знаку -), а остальные $b - 1$ разрядов дают модуль числа. Например, если $b = 7$, то десятичное число $-1,375$ записывается как 11,01100, причем двоичная запятая располагается после второго старшего разряда. При таком кодировании ($b = 7$) число 0 имеет две формы: 00,00000 и 10,00000, поэтому с помощью b разрядов можно точно представить только $2^b - 1$ чисел.

При использовании дополнительного кода положительные числа представляются так же, как и в прямом коде. Для формирова-

ния кода отрицательного числа все разряды соответствующего положительного числа инвертируются, после чего к младшему разряду добавляется единица. Например, число $-(01,01100)$ в дополнительном коде имеет вид

$$-(01,01100) = (10,10011) + (00,00001) = 10,10100.$$

Наибольшее положительное число, которое можно точно представить в дополнительном коде, равно $01,11111$ (при $b = 7$), а наименьшее отрицательное число равно $10,00000$; его модуль на единицу младшего разряда превышает предыдущее число. Поскольку для нуля имеется только одна форма записи, в дополнительном b -разрядном коде можно точно представить 2^b различных чисел.

Обратный код положительных чисел совпадает с их прямым и дополнительным кодом. Обратный код отрицательных чисел формируется путем простой инверсии всех разрядов соответствующего положительного числа. Например, обратный код отрицательного числа с модулем $(01,01100)$ будет равен $-(01,01100) = (10,10011)$. Таким образом, ноль имеет в данной системе две формы записи: $00,00000$ и $11,11111$.

Выбор конкретного из трех перечисленных способов кодирования обычно определяется особенностями программирования и аппаратной реализации. Так, операцию вычитания удобнее всего выполнять в дополнительном коде. Для построения последовательных умножителей проще всего использовать прямой код и перемножать только модули чисел, а знак произведения формировать из знаков сомножителей с помощью простой логической схемы.

При построении цифровых фильтров с использованием систем счисления с фиксированной запятой обычно считается, что двоичная запятая расположена справа от старшего разряда. Следовательно, числа могут принимать значения в пределах от $-1,0$ до $1,0 - 2^{-(b-1)}$, где b — число разрядов. Это не нарушает общности, так как всегда сигналы можно пронормировать таким образом, чтобы их значения находились в пределах выбранного диапазона. При записи коэффициентов фильтра запятая может быть передвинута вправо, чтобы использовать коэффициенты, превышающие единицу.

5.6. Системы счисления с плавающей запятой

В системах счисления с плавающей запятой положительные числа представляются с помощью двух чисел с фиксированной запятой — мантиссы и порядка. Число f с плавающей запятой равно произведению мантиссы m и числа, получающегося при возведении основания системы (обычно равного 2) в степень, равную порядку a , т. е.

$$f = m \cdot 2^a. \quad (5.7)$$

Мантиссу m обычно нормируют так, чтобы она имела наибольшее возможное значение, но не превышала некоторого предела, например числа 1,0. В данной главе будет предполагаться, что мантисса приводится к интервалу

$$\frac{1}{2} \leq m < 1. \quad (5.8)$$

Таким образом, десятичные числа 3,0; 1,5 и 0,75 в системе счисления с плавающей запятой (при основании 2) изображаются соответственно как $2^2 \times 0,75$; $2^1 \times 0,75$ и $2^0 \times 0,75$.

Отрицательные числа с плавающей запятой обычно образуют, представляя мантиссу числом с фиксированной запятой, имеющим знак. Таким образом, знак числа с плавающей запятой определяется старшим разрядом мантиссы. Порядок также является числом с фиксированной запятой и со знаком, а с помощью отрицательных порядков записываются числа, модуль которых меньше 0,5.

Все b разрядов числа с плавающей запятой следует разделить на две группы: b_1 разрядов задают мантиссу, а $b_2 = b - b_1$ — порядок. При заданном числе разрядов b с увеличением разрядности порядка b_2 расширяется динамический диапазон представляемых чисел, но снижается точность их представления. В большинстве случаев при использовании чисел с плавающей запятой (например, при обработке на ЦВМ с использованием языков программирования высокого уровня) $b_1 \approx 3/4b$. Так, например, в ЦВМ с 36-разрядными словами 27 разрядов отводятся для мантиссы и 9 — для порядка. Это позволяет представить с плавающей запятой числа f , лежащие в диапазоне

$$0,5 \times 2^{-256} \leq |f| < 2^{256},$$

причем мантисса представляется с точностью около 2^{-27} .

Перемножение чисел f_1 и f_2 с плавающей запятой производится следующим образом. Пусть

$$f_1 = m_1 \times 2^{a_1},$$

$$f_2 = m_2 \times 2^{a_2}.$$

Тогда произведение $f_3 = f_1 \times f_2$ образуется по формуле

$$f_3 = (m_1 \times m_2) 2^{(a_1+a_2)},$$

т. е. мантиссы перемножаются как числа с фиксированной запятой, а порядки складываются. Величина произведения мантисс $|m_1 \times m_2|$ находится в пределах от 0,25 до 1, т. е. может не соответствовать условию нормирования. В этом случае для нормирования произведения необходимо изменить порядок $a_1 + a_2$. Так, произведение десятичных чисел $1,25 \times 1,25$ (при $b_2 = 3$,

$b_1 = 9$) будет равно $(2^{001} \times 0,10100000) \times (2^{001} \times 0,10100000) = 2^{010} \times 0,01100100 = 2^{001} \times 0,11001000$.

Сложение чисел с плавающей запятой оказывается более сложной операцией, чем сложение чисел с фиксированной запятой. Чтобы сложить два числа, меньшее из них нужно изменить так, чтобы его порядок равнялся порядку большего числа. При этом меньшее число станет ненормированным. Далее обе мантиссы складываются, а результат нормируется согласно условию (5.8). При этом порядок суммы может измениться. В качестве примера рассмотрим сложение двух чисел с плавающей запятой, считая, что мантиссы и порядки представлены в дополнительном коде:

$$\begin{aligned} f_{1n} &= 2^{010} \times 0,11000000 - f_1 \text{ нормированное} = 3,0 |_{10} \\ + f_{2n} &= 2^{000} \times 0,10100000 - f_2 \text{ нормированное} = 0,625 |_{10} \\ \hline f_{2u} &= 2^{010} \times 0,00101000 - f_2 \text{ ненормированное} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{3u} &= f_{1n} + f_{2u} = 2^{010} \times 0,11101000 - \text{ненормированная сумма} = \\ &= 3,625 |_{10} \end{aligned}$$

$$f_{3n} = f_{3u} - \text{нормированная сумма}$$

В данном случае нормированное число f_{2n} было преобразовано в ненормированное число f_{2u} , которое затем было сложено с f_{1n} , а результат f_{3u} оказался ненормированным числом.

Из приведенных рассуждений можно сделать вывод, что при представлении чисел с плавающей запятой ошибки округления или усечения могут возникать как при умножении, так и при сложении, тогда как при использовании фиксированной запятой они имеют место только при умножении. Однако во втором случае возможны переполнения, а в первом случае ввиду значительно большего динамического диапазона чисел они весьма маловероятны.

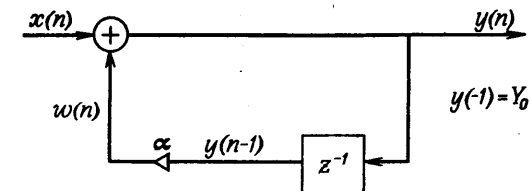
5.7. Система счисления с поблочно плавающей запятой

Представление чисел с поблочно плавающей запятой является комбинацией представлений чисел с фиксированной и плавающей запятой: вместо нормирования каждого представляемого числа в отдельности, как это делается в системе счисления с плавающей запятой, один и тот же порядок используется для представления целого массива чисел. Для этого из массива выбирается наибольшее число и представляется как обычное число с плавающей запятой и с нормированной мантиссой. Достоинством данного представления является то, что более экономно используется память, поскольку порядок является общим. Такое представление особенно удобно для алгоритмов БПФ, хотя оно может быть использовано и при построении цифровых фильтров.

5.8. Виды квантования в цифровых фильтрах

Из предшествующих глав известно, что при выполнении цифровой фильтрации используются операции умножения, сложения и сдвига. Поэтому, если отсчеты на входе цифрового фильтра (поступающие, например, с выхода АЦП) имеют конечную разрядность, при обработке будут, как правило, получаться числа, для точного представления которых необходимо большее число разрядов. Например, если b -разрядный входной отсчет умножается на b -разрядный коэффициент фильтра, для хранения результата необходимо $2b$ -разрядный регистр. Более того, если произведение снова не представить b -разрядным числом, то в рекурсивных схемах число разрядов регистров, служащих для хранения последовательных произведений, может возрасти беспредельно.

Рассмотрим, например, рекурсивную цепь первого порядка (фиг. 5.10). Если для представления отсчетов входной последовательности и множителя α используются b разрядов, то после первой итерации отсчеты $w(n)$ будут содержать по $2b$ разрядов, поскольку α (b разрядов) $\times y(-1)$ (b разрядов) = $w(0)$ ($2b$ разрядов). Если $w(n)$ не квантуется, то для представления $y(0) = w(0) + x(0)$ потребуется $2b$ разрядов. После второй итерации для $w(n)$ понадобится $3b$ разрядов, поскольку α (b разрядов) $\times y(0)$ $\times (2b$ разрядов) = $w(1)$ ($3b$ разрядов). Если этот процесс продолжать, то число разрядов, необходимое для представления $w(n)$ [или $y(n)$], будет линейно увеличиваться до бесконечности. Ясно, что такой результат неприемлем. Обычный способ решения этой проблемы состоит в отбрасывании младших разрядов чисел увеличенной разрядности, образующихся в цифровом фильтре при умножениях (а иногда и при сложениях). При отбрасывании младших разрядов используются два стандартных способа: усечение и округление. Оба способа уже обсуждались выше при рассмотрении аналого-цифрового преобразования, поэтому ниже будут просто перечислены особенности обоих способов применительно к различным системам счисления, используемым при построении цифровых фильтров.



Фиг. 5.10. Простая рекурсивная цепь первого порядка.

5.9. Усечение

При усечении числа отбрасываются все младшие разряды, стоящие после наименьшего сохраняемого разряда. Таким образом, ошибка, получающаяся при усечении положительного числа, представленного в дополнительном коде, удовлетворяет неравенству

$$-2^{-b} \leq x_{\text{yc}} - x \leq 0, \quad (5.9)$$

где b — число сохраняемых разрядов, стоящих после двоичной запятой, а x_{yc} — усеченное значение x , причем предполагается, что $|x| \leq 1,0$. Для чисел, представленных в прямом или обратном коде, ошибка усечения удовлетворяет неравенству (5.9) только при $x > 0$. Если же $x < 0$, то справедливо другое неравенство:

$$0 \leq x_{\text{yc}} - x < 2^{-b}, \quad x < 0. \quad (5.10)$$

При использовании чисел с плавающей запятой усечение касается только мантиссы. Так, рассмотрим число $x = 2^c \cdot m$, в котором m — мантисса, а c — порядок. Усечем мантиссу до b разрядов и запишем ошибку усечения ($x_{\text{yc}} - x$) как величину, пропорциональную x , т. е.

$$x_{\text{yc}} - x = (1 + \varepsilon)x. \quad (5.11)$$

Тогда при записи мантиссы в дополнительном коде ошибка усечения удовлетворяет неравенству

$$-2^{-b} \cdot 2^c \leq \varepsilon x \leq 0. \quad (5.12)$$

При $x > 0$ справедливо неравенство

$$2^{c-1} \leq x < 2^c, \quad x > 0. \quad (5.13)$$

Из неравенства (5.12) следует, что при положительном x ошибка εx отрицательна, т. е. ε должно быть отрицательным. Поэтому, умножая (5.13) на ε и меняя при этом знаки неравенств, получим

$$2^c \varepsilon < \varepsilon x \leq 2^{c-1} \varepsilon, \quad x > 0. \quad (5.14)$$

Из неравенств (5.12) и (5.14) следует, что

$$-2^{-b} \cdot 2 < \varepsilon \leq 0, \quad x > 0. \quad (5.15)$$

Если же $x < 0$, то для ε можно получить следующее неравенство:

$$0 \leq \varepsilon < 2^{-b} \cdot 2, \quad x < 0. \quad (5.16)$$

Аналогичным образом можно найти границы для ε при представлении мантиссы в прямом или обратном коде. В этих случаях искомое неравенство имеет вид

$$-2 \cdot 2^{-b} < \varepsilon \leq 0 \text{ при любых } x. \quad (5.17)$$

Наиболее важный вывод из вышеизложенного состоит в том, что ошибка усечения всегда заключена между нулем и числом, пропорциональным $\pm 2^{-b}$.

5.10. Округление

При округлении числа до b разрядов исходное неокругленное число заменяется на ближайшее b -разрядное число. Если же округляемое число располагается посередине между двумя соседними b -разрядными числами, то округленное значение следует выбирать случайным образом. Так, число 0,01010, округленное до двух разрядов после запятой, будет равно 0,01, но при округлении до трех разрядов это будет либо 0,011, либо 0,010, причем выбор должен быть случайным. В большинстве случаев, когда приходится выбирать, в какую сторону округлять, случайный характер округления сказывается на точности вычислений очень слабо.

Для систем с фиксированной запятой ошибка при округлении числа до b разрядов после запятой удовлетворяет неравенству

$$-\frac{2^{-b}}{2} \leq x_{\text{ок}} - x \leq \frac{2^{-b}}{2} \quad (5.18)$$

для всех трех методов представления чисел (в дополнительном, обратном и прямом кодах).

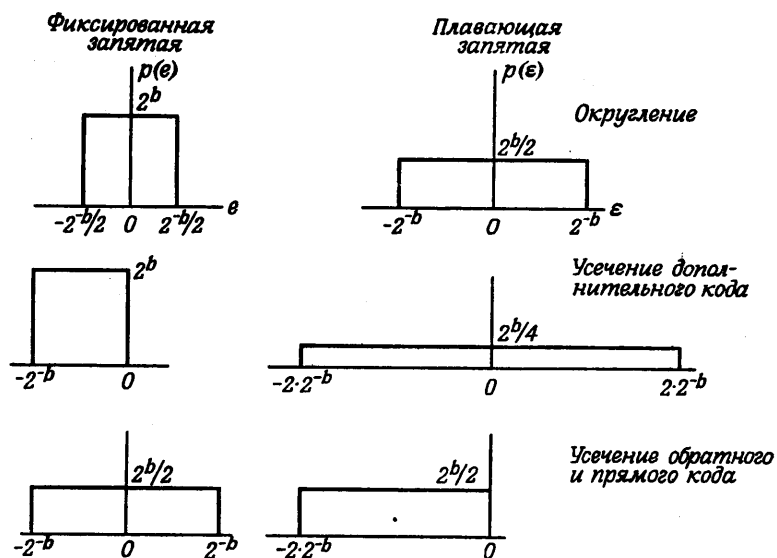
Ошибка округления чисел с плавающей запятой удовлетворяет неравенству

$$-2^c \frac{2^{-b}}{2} \leq x_{\text{ок}} - x \leq 2^c \frac{2^{-b}}{2}. \quad (5.19)$$

Если ее снова записать в виде величины, пропорциональной x , т. е. как $x_{\text{ок}} - x = \varepsilon x$, то для ε при любом из трех способов представления мантиссы будет справедливо следующее неравенство:

$$-2^{-b} \leq \varepsilon \leq 2^{-b}. \quad (5.20)$$

Все неравенства (5.9) — (5.20), относящиеся к ошибкам округления и усечения, удобно представить с помощью плотностей вероятности ошибки. Хотя предельные значения ошибок известны, распределение ошибок в этих пределах не известно. Вполне естественно предположить, что все возможные значения ошибки равновероятны, т. е. ошибки распределены равномерно. На фиг. 5.11 приведены графики плотности вероятности ошибок округления и усечения, построенные при этих предположениях для систем с фиксированной и плавающей запятой. При фиксированной запятой рассматривается абсолютная ошибка типа $e = x_{\text{ок}} - x$, а при плавающей — относительная ошибка типа $e = (x_{\text{ок}} - x)/x$.

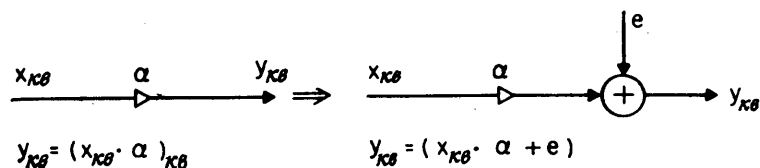


Фиг. 5.11. Плотности вероятности шума квантования.

5.11. Шум округления в рекурсивных структурах с фиксированной запятой

В цифровых фильтрах при использовании систем счисления с фиксированной запятой выполняются операции умножения на постоянные величины (коэффициенты фильтра) и сложения. Пока переполнений не происходит, сложение двух или более чисел с фиксированной запятой не может привести к ошибкам в представлении суммы. (Но так как переполнение при сложении все-таки возможно, то при построении фильтра необходимо ввести ограничения на динамический диапазон сигнала. В данной главе мы еще вернемся к этому вопросу.) С другой стороны, умножение *не может* вызвать переполнения (если оба сомножителя были соответствующим образом пронормированы), но результат умножения необходимо квантовать. Пока не будет оговорено особо, будем считать, что при квантовании используется округление, так как ему свойственны некоторые желательные для нас свойства: ошибка не зависит от системы счисления, ее среднее равно нулю (в отличие от ошибки усечения), а дисперсия меньше, чем для других методов квантования.

Модель, описывающая шум округления произведения в системе с фиксированной запятой, показана на фиг. 5.12. Умножитель рассматривается здесь как устройство, работающее с бесконечной



Фиг. 5.12. Шумовая модель квантования при умножении с фиксированной запятой.

точностью, а вслед за ним включен сумматор, на который поступает шум квантования произведения, так что результат суммирования обязательно равен одному из уровней квантования. В модели принято, что отсчеты шума округления e являются случайными величинами с равномерным распределением, которое представлено на фиг. 5.11 для случая округления чисел с фиксированной запятой. Таким образом, каждый отсчет шума округления — это случайная величина с нулевым средним и дисперсией, равной $2^{-2b}/12$, где $(b + 1)$ — число разрядов (включая знаковый), используемых для представления переменных фильтра.

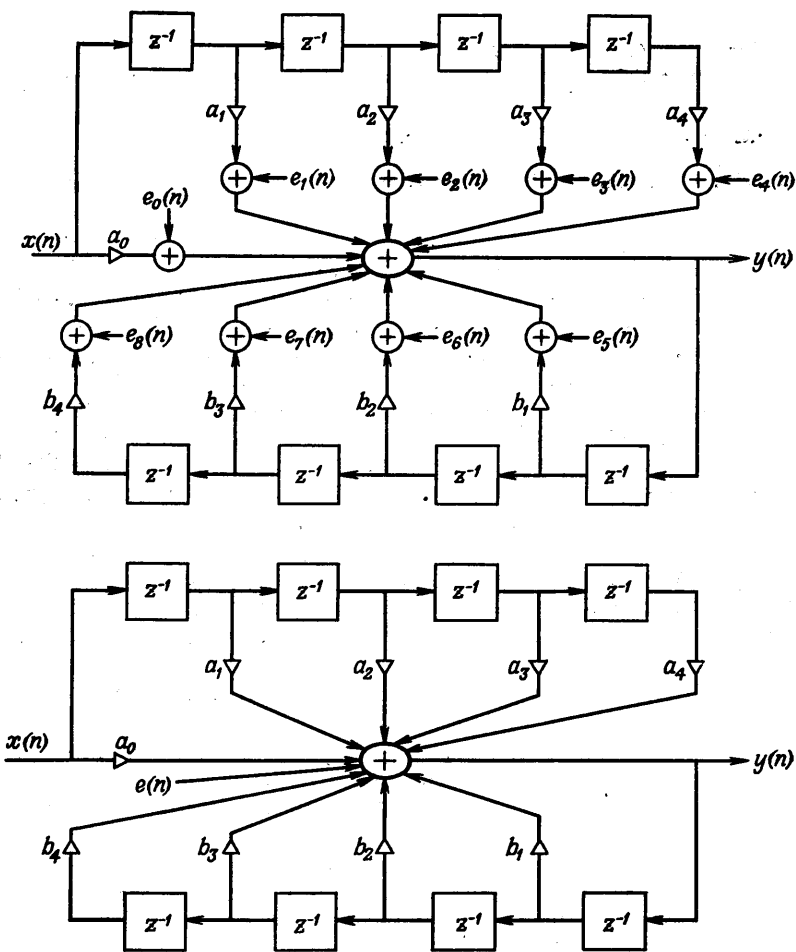
Для моделирования эффектов округления при умножении в цифровом фильтре необходимо сделать некоторые предположения относительно статистической независимости различных источников шума, возникающего в фильтре. Обычно используются следующие предположения:

1. Любые два отсчета шума от одного и того же источника не коррелированы.
2. Любые два источника шума (возникающего в различных умножителях) создают некоррелированные шумы.
3. Шум от каждого из источников некоррелирован с входной последовательностью.

Таким образом, шум от каждого из источников шума квантования произведения рассматривается как дискретный стационарный случайный процесс с равномерной спектральной плотностью мощности, равной $2^{-2b}/12$.

Следует отметить, что эти предположения справедливы не всегда. В частности, если входные отсчеты постоянны, все три предположения нарушаются. При этом шум (т. е. ошибку) округления уже нельзя считать некоррелированным с входной последовательностью. Вопросы, связанные с коррелированным шумом округления (т. е. с предельными циклами), будут рассмотрены в разд. 5.31.

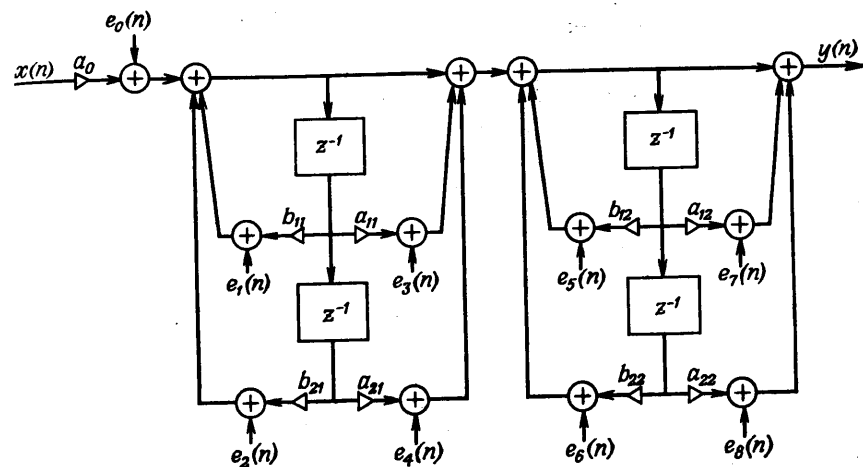
На фиг. 5.13 изображена блок-схема цифрового фильтра четвертого порядка, построенного в прямой форме, в которой в соответствии с вышеприведенной моделью все умножители, имеющие конечную точность вычислений, заменены идеальными умножителями и источниками аддитивного шума округления. Поскольку



Фиг. 5.13. Шумовая модель квантования произведений в рекурсивном фильтре четвертого порядка.

шумы от всех источников приложены к одной точке фильтра, их можно заменить одним источником шума $e(n) = e_0(n) + e_1(n) + \dots + e_8(n)$ с нулевым средним и дисперсией, равной (согласно предположению 2) $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_8^2 = (9 \times 2^{-2b})/12$, как показано в нижней части фиг. 5.13.

Если фильтр четвертого порядка (фиг. 5.13) реализуется путем последовательного соединения двух фильтров второго порядка, то шумовая модель такого фильтра имеет вид, показанный на



Фиг. 5.14. Шумовая модель квантования произведений при последовательном соединении двух рекурсивных блоков.

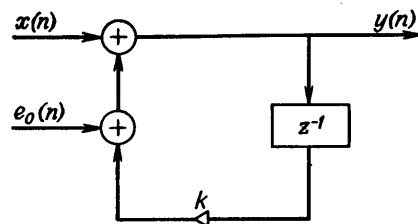
фиг. 5.14. В ней также имеется девять источников шума [с $e_0(n)$ по $e_8(n)$], но они уже не подключаются к общей точке, как это было на фиг. 5.13. Как и в предыдущем случае, важно оценить дисперсию шума на выходе фильтра. Для оценки дисперсии составляющих выходного шума, обусловленных каждым из источников, можно воспользоваться теорией линейных систем, а дисперсия полного шума, согласно предположению 2, будет равна сумме дисперсий отдельных составляющих.

Рассмотрим k -й источник шума $e_k(n)$. Пусть $h_k(n)$ — импульсная характеристика участка цепи от источника шума до выхода фильтра. [Заметим, что $h_k(n)$ для конкретных цепей можно определить методами теории линейных систем с постоянными параметрами.] Составляющая выходного шума $\mathcal{E}_k(n)$, обусловленная источником $e_k(n)$, равна свертке

$$\mathcal{E}_k(n) = \sum_{m=0}^n h_k(m) e_k(n-m). \quad (5.21)$$

Дисперсия $\mathcal{E}_k(n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{0k}^2(n) &= E \left[\sum_{m=0}^n h_k(m) e_k(n-m) \sum_{l=0}^n h_k(l) e_k(n-l) \right] = \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n h_k(m) h_k(l) E [e_k(n-m) e_k(n-l)] = \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n h_k(m) h_k(l) \delta(l-m) \sigma_e^2, \end{aligned} \quad (5.22)$$



Фиг. 5.15. Шумовая модель квантования произведений в системе первого порядка.

$$\sigma_{0k}^2(n) = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^n h_k^2(m), \quad (5.23)$$

причем соотношение (5.23) было выведено с учетом предположений 1 и 3 (см. стр. 343), а $\sigma_e^2 = 2^{-2b}/12$.

В пределе, когда $n \rightarrow \infty$, дисперсия $\sigma_{0k}^2(n)$ стремится к установившемуся значению

$$\sigma_{0k}^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h_k^2(m). \quad (5.24)$$

При этом дисперсия полного шума будет равна

$$\sigma_0^2 = \sum_k \sigma_{0k}^2. \quad (5.25)$$

Для цепей первого и второго порядка величина σ_0^2 рассчитывается достаточно просто. В фильтре первого порядка (фиг. 5.15) имеется только один источник шума $e_0(n)$, а импульсная характеристика $h_0(n) = k^n u_{-1}(n)$, так что

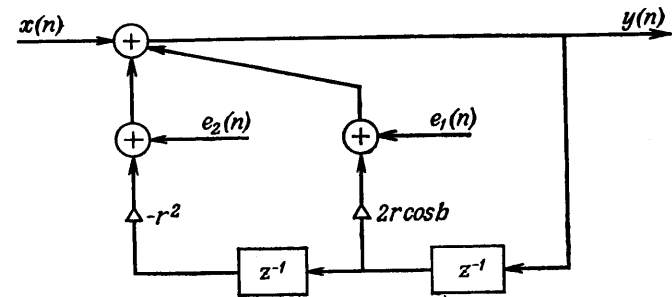
$$\sigma_0^2 = \sigma_{00}^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \sum_{m=0}^{\infty} k^{2m} = \frac{2^{-2b}}{12} \frac{1}{1-k^2}.$$

На фиг. 5.16 изображен фильтр второго порядка с z -преобразованием импульсной характеристики, равным

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r(\cos b)z^{-1} + r^2z^{-2}}.$$

В нем содержатся два источника шума $e_1(n)$ и $e_2(n)$, причем импульсные характеристики цепей, по которым проходят шумовые последовательности, имеют вид

$$h_1(n) = h_2(n) = \{r^n \sin[(n+1)b]/\sin b\} u_{-1}(n).$$



Фиг. 5.16. Шумовая модель квантования произведений в системе второго порядка.

В этом случае установившееся значение дисперсии выходного шума равно

$$\sigma_0^2 = \sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2 = 2 \frac{2^{-2b}}{12} \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \frac{\sin^2[(m+1)b]}{\sin^2 b}$$

или после суммирования имеем

$$\sigma_0^2 = \frac{2^{-2b}}{6} \left[\frac{(1+r^2)}{(1-r^2)} \frac{1}{(1+r^4-2r^2 \cos 2b)} \right]. \quad (5.25a)$$

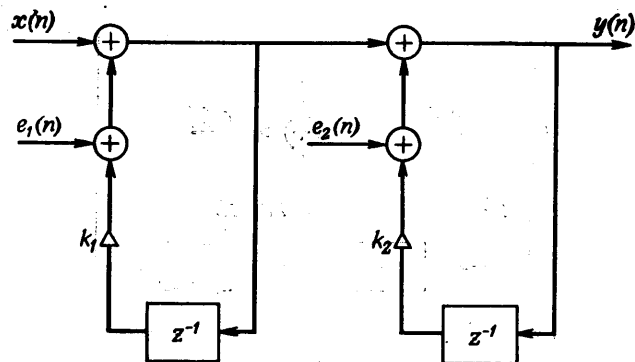
При оценке установившегося значения дисперсии выходного шума [формула (5.24) или (5.25)] приходится суммировать бесконечный ряд значений $h_k^2(m)$. Обычно для самих отсчетов $h_k(m)$ трудно найти явное аналитическое выражение, но еще труднее их просуммировать. Иногда вычисления можно упростить, применив для нахождения суммы бесконечного ряда теорему Парсеваля (см. гл.2)

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_k^2(m) = \frac{1}{2\pi j} \oint H_k(z) H_k(z^{-1}) z^{-1} dz, \quad (5.26)$$

где $H_k(z)$ равно z -преобразованию от $h_k(m)$, которое легко найти по структурной форме цифрового фильтра. Интеграл (5.26) можно вычислить, интегрируя вдоль единичной окружности и используя теорему Коши о вычетах. Например, для системы второго порядка, изображенной на фиг. 5.16,

$$H_1(z) = H_2(z) = \frac{1}{1 - 2r(\cos b)z^{-1} + r^2z^{-2}},$$

причем полюсы этого z -преобразования находятся в точках $z = re^{\pm jb}$ (здесь $r < 1$ согласно условию устойчивости фильтра). Функции $H_1(z^{-1})$ и $H_2(z^{-1})$ имеют полюсы в точках $z = (1/r)e^{\pm jb}$, расположенных вне единичного круга. Таким образом, для вычис-



Фиг. 5.17. Шумовая модель квантования произведений при последовательном соединении двух блоков первого порядка.

ления интеграла (5.26) необходимо найти значения вычетов функции $H_1(z)H_1(z^{-1})/z$ в точках $z = re^{\pm jb}$. Получаемый при этом результат совпадает с полученным ранее выражением (5.25а), также относящимся к системе второго порядка.

В качестве еще одного примера вычисления установившегося значения дисперсии выходного шума рассмотрим два последовательно соединенных блока первого порядка (фиг. 5.17). Для источника шума $e_2(n)$ они представляют цепь с z -преобразованием импульсной характеристики

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - k_2 z^{-1}},$$

а для источника шума $e_1(n)$ — цепь с z -преобразованием

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - k_2 z^{-1})(1 - k_1 z^{-1})}.$$

Тогда, согласно формулам (5.24) — (5.26), установившееся значение дисперсии выходного шума будет равно

$$\sigma_0^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint \left(\frac{1}{1 - k_2 z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - k_1 z} \right) z^{-1} dz + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi j} \oint \left(\frac{1}{1 - k_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - k_2 z} \right) \left(\frac{1}{1 - k_2 z^{-1}} \right) \left(\frac{1}{1 - k_1 z} \right) z^{-1} dz \right].$$

Для вычисления интегралов в качестве контура следует выбрать единичную окружность. Тогда первый интеграл будет иметь внутри контура только один полюс в точке $z = k_2$, а второй — два

(в точках $z = k_1$ и $z = k_2$). Рассчитав вычеты, получим

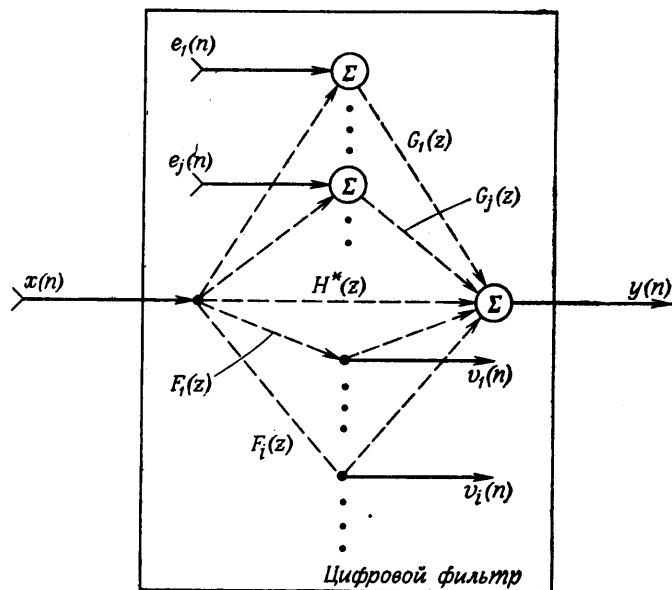
$$\sigma_0^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \left[\frac{1}{1 - k_2^2} + \frac{k_1}{(1 - k_1^2)(k_1 - k_2)(1 - k_1 k_2)} + \right. \\ \left. + \frac{k_2}{(1 - k_2^2)(k_2 - k_1)(1 - k_1 k_2)} \right], \\ \sigma_0^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \left[\frac{1}{1 - k_2^2} + \frac{(1 + k_1 k_2)}{(1 - k_1 k_2)} \frac{1}{(1 - k_1^2)(1 - k_2^2)} \right].$$

Получить этот результат без использования формулы (5.26) было бы значительно труднее. Описанная возможность применения спектральных методов для оценки дисперсии шума округления открывает пути для практического использования нескольких процедур масштабирования, рассматриваемых в разд. 5.12.

5.12. Ограничение динамического диапазона в системах с фиксированной запятой

Как уже упоминалось, при сложении чисел с фиксированной запятой ошибки округления вообще не возникают, зато эта операция может привести в цифровом фильтре к гораздо более опасному явлению — переполнению. Было предложено несколько способов устранения переполнений (после их обнаружения), но полагаться на эти способы нецелесообразно, так как они связаны с нелинейной обработкой. Вместо этого следует проектировать фильтры таким образом, чтобы в нормальных условиях переполнения были маловероятны. Для предотвращения переполнений следует в определенных точках фильтра масштабировать сигналы так, чтобы при сложении не возникало переполнений. В данном разделе будет описана весьма общая методика выбора масштабирующих множителей, позволяющая предотвратить переполнения и в то же время сохранить максимально возможную величину отношения сигнала к уровню шума округления в фильтре. Теоретические основы методики разработаны в основном Джексоном. Эта методика довольно сложная, но она позволяет непосредственно выбрать как разрядность в фильтре, обеспечивающую заданное отношение сигнала к шуму округления, так и наилучшую схему построения фильтра. Вышеизложенное позволяет надеяться, что сложность материала данного раздела с лихвой окупится более ясным пониманием особенностей построения фильтров. Мы будем в основном пользоваться обозначениями и методом изложения, использованными Джексоном.

На фиг. 5.18 изображен направленный граф, описывающий работу шумовой модели цифрового фильтра. Умножители и элементы задержки представляются ветвями графа, а его узлы соответствуют



Фиг. 5.18. Направленный граф, представляющий шумовую модель цифрового фильтра (по Джексоу).

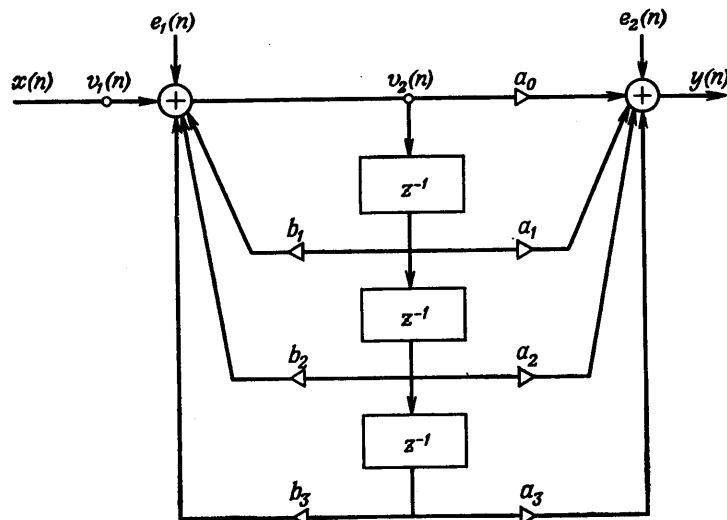
либо сумматорам (узлы суммирования), либо точкам соединения проводников схемы (узлы разветвления).

Входной последовательностью фильтра является $x(n)$, а выходной $y(n)$. Сигнал, выходящий из i -го узла разветвления, обозначается через $v_i(n)$, а ошибка округления в j -м узле суммирования — через $e_j(n)$. Последовательности $h(n)$ и $f_i(n)$ являются соответственно импульсными характеристиками всего фильтра и части того же фильтра при условии, что выходной сигнал снимается с i -го узла разветвления. Последовательность $g_j(n)$ является откликом на последовательность $e_j(n) = u_0(n)$, причем $x(n) = e_k(n) = 0$ для любых $k \neq j$. Функции $H(z)$, $F_i(z)$ и $G_j(z)$ являются z -преобразованиями последовательностей $h(n)$, $f_i(n)$ и $g_j(n)$ соответственно.

Для пояснения основных идей рассмотрим приведенную на фиг. 5.19 прямую форму фильтра, содержащего два узла разветвления и два узла суммирования. z -преобразования, используемые в шумовой модели этого фильтра, равны

$$F_1(z) = 1,$$

$$F_2(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3}},$$



Фиг. 5.19. Прямая форма построения системы третьего порядка.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3}},$$

$$G_1(z) = H(z),$$

$$G_2(z) = 1.$$

Задача состоит в том, чтобы с помощью этой модели найти метод масштабирования последовательностей $v_i(n)$, гарантирующий отсутствие переполнений в любом из узлов суммирования и в то же время позволяющий минимизировать дисперсию шума округления на выходе фильтра. Если предположить, что к j -му узлу суммирования подключены k_j источников шума (так, для схемы на фиг. 5.19 $k_1 = 3$, $k_2 = 4$) и каждый из них создает белый шум со спектральной плотностью мощности, равной $Q^2/12$ (где $Q = 2^{-b}$ — величина шага квантования), то, согласно предположению о некоррелированности шумовых источников, шум $e_j(n)$ также будет белым и иметь спектральную плотность, равную $k_j(Q^2/12)$. Спектральную плотность мощности выходного шума можно определить, используя теорию линейных систем. Она равна

$$N_y(e^{j\omega}) = \frac{Q^2}{12} \sum_j k_j |G_j(e^{j\omega})|^2. \quad (5.27)$$

Если в фильтре предусмотрено масштабирование переменных (масштабированные переменные будут отмечаться штрихом), то фор-

мула (5.27) примет вид

$$N_v(e^{j\omega}) = \frac{Q^2}{12} \sum_j k_j |G_j(e^{j\omega})|^2, \quad (5.28)$$

причем $k_j \geq k_j$, так как умножение на масштабирующие множители является дополнительным источником ошибок.

Если предположить, что входная последовательность $x(n)$ ограничена по величине числом 1,0, то нетрудно найти масштабирующие множители, гарантирующие выполнение условий $|v_i(n)| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$. Последовательность $v_i(n)$ равна свертке

$$v_i(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f_i(m) x(n-m). \quad (5.29)$$

(Здесь предполагается, что начальные условия нулевые, а шум округления отсутствует.) Поскольку $|x(n-m)| \leq 1$, то

$$|v_i(n)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)|. \quad (5.30)$$

Таким образом, для выполнения неравенства $|v_i(n)| \leq 1$ достаточно, чтобы промасштабированная последовательность $f_i(m)$ удовлетворяла соотношению

$$\sum_{m=0}^{\infty} |f_i(m)| \leq 1. \quad (5.31)$$

Нетрудно показать, что условие (5.31) является и необходимым условием справедливости неравенства $|v_i(n)| \leq 1$ при любых n .

На практике для определения масштабирующих множителей формулу (5.31) обычно не применяют, так как она дает их со слишком большим запасом, причем просуммировать ряд (5.31) довольно трудно. Можно найти более удобные методы масштабирования, если ввести определенные допущения о классе входных сигналов, например об ограниченности энергий или спектров сигналов.

Если предположить, что $x(n)$ является детерминированной последовательностью с z -преобразованием $X(z)$, то $v_i(n)$ [см. формулу (5.29)] можно найти с помощью обратного преобразования Фурье от произведения преобразований Фурье последовательностей $f_i(n)$ и $x(n)$, т. е.

$$v_i(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_i(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (5.32)$$

Если положить, что норма преобразования Фурье $A(e^{j\omega})$ в пространстве L_p ($p \geq 1$) равна

$$\|A\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^p d\omega \right]^{1/p} \quad (5.33)$$

(при условии, что этот интеграл сходится), то предел нормы (5.33) при $p \rightarrow \infty$ существует и равен

$$\|A\|_{\infty} = \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |A(e^{j\omega})|. \quad (5.34)$$

Таким образом, норма $A(e^{j\omega})$ в пространстве L_{∞} равна максимальному значению $|A(e^{j\omega})|$ по всем ω . С помощью норм в пространстве L_p и равенства (5.32) сравнительно нетрудно определить границы для $|v_i(n)|$. Например, если $\|X\|_{\infty} \leq 1$ (т. е. максимум спектра входного сигнала конечен), то, согласно (5.32),

$$|v_i(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_i(e^{j\omega})| d\omega. \quad (5.35)$$

С помощью норм это соотношение можно записать в виде

$$|v_i(n)| \leq \|F_i\|_1 \|X\|_{\infty}. \quad (5.36)$$

Аналогично, если норма $\|F_i\|_{\infty}$ ограничена, то

$$|v_i(n)| \leq \|F_i\|_{\infty} \|X\|_1. \quad (5.37)$$

Применяя к формуле (5.32) неравенство Шварца, получим

$$|v_i(n)|^2 \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_i(e^{j\omega})|^2 d\omega \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \right] \quad (5.38)$$

или

$$|v_i(n)| \leq \|F_i\|_2 \|X\|_2. \quad (5.39)$$

В общем случае можно показать, что

$$|v_i(n)| \leq \|F_i\|_p \|X\|_q, \quad (5.40)$$

причем

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 1.$$

Если $F_i(\omega) = 1$, то $\|F_i\|_p = 1$ при любых $p \geq 1$, так что в данном частном случае соотношение (5.40) принимает вид

$$|v_i(n)| = |x(n)| \leq \|X\|_q = \|V_i\|_q, \quad q \geq 1. \quad (5.41)$$

Неравенство (5.40) можно переписать, используя спектральные величины:

$$\|V_i\|_1 \leq \|F_i\|_p \|X\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (5.42)$$

где $\|V_i\|_1$ — среднее значение модуля $V_i(e^{j\omega})$. Таким образом, из неравенств (5.42) и (5.41) следует, что среднее значение модуля $V_i(e^{j\omega})$ ограничено величиной произведения $\|F_i\|_p \|X\|_q$, которая в то же время является ограничением и для $|v_i(n)|$.

Исходя из приведенных формул и нормы входной последовательности в пространстве L_q , можно сформулировать достаточные условия для масштабирования. Допустим, что $\|X\|_q \leq 1$ ($q \geq 1$); тогда норма масштабированного спектра $F_i(e^{j\omega})$ в пространстве L_p должна удовлетворять условию

$$\|F_i\|_p \leq 1, \quad p = \frac{q}{q-1}. \quad (5.43)$$

Наиболее важными парами чисел (p, q) являются $(1, \infty)$, $(2, 2)$ и $(\infty, 1)$. Вариант $p = 1, q = \infty$ используется в том случае, когда известен максимум модуля входного спектра и ограничивается норма $F_i(e^{j\omega})$ в L_1 . Вариант $p = 2, q = 2$ соответствует случаю ограничения энергии входной последовательности и «энергии» частотной характеристики $F_i(e^{j\omega})$. При $p = \infty, q = 1$ ограничивается максимум спектра $F_i(e^{j\omega})$.

Если входные сигналы являются случайными, неравенства (5.40) и (5.42) применять нельзя, так как для случайных процессов преобразование Фурье не определено. Вместо них можно получить эквивалентные неравенства, записанные относительно спектральной плотности мощности и автокорреляционной функции. Пусть $x(n)$ — случайный сигнал с автокорреляционной функцией $\varphi_x(n)$ и спектральной плотностью мощности $\Phi_x(e^{j\omega})$, и пусть $v_i(n)$ — случайный сигнал, образующийся в i -м узле разветвления и имеющий автокорреляционную функцию $\varphi_{v_i}(n)$ и спектральную плотность мощности $\Phi_{v_i}(e^{j\omega})$. Можно показать, что

$$\varphi_{v_i}(n) \leq \|F_i\|_p^2 \|\Phi_x\|_q, \quad (5.44)$$

или, что то же самое,

$$\varphi_{v_i}(n) = \|F_i\|_{2p}^2 \|\Phi_x\|_q, \quad (5.45)$$

причем для обеих формул $1/p + 1/q = 1$. Поскольку $\sigma_{v_i}^2 = \varphi_{v_i}(0)$, то из формул (5.44) и (5.45) следует, что дисперсия $v_i(n)$ ограничена аналогичным образом. Действительно, если $p = 1$, а $q = \infty$, причем входной сигнал имеет равномерный энергетический спектр (т. е. $\|\Phi_x\|_q = \sigma_x^2$), то из формулы (5.45) следует, что

$$\sigma_{v_i}^2 \leq \sigma_x^2 \|F_i\|^2. \quad (5.46)$$

Чтобы выполнялось соотношение $\sigma_{v_i}^2 \leq \sigma_x^2$, необходимо, чтобы $\|F_i\|_2 \leq 1$, т. е. чтобы «энергия» промасштабированной передаточной функции была ограничена величиной 1,0.

5.13. Ограничение динамического диапазона при построении фильтров в прямой форме

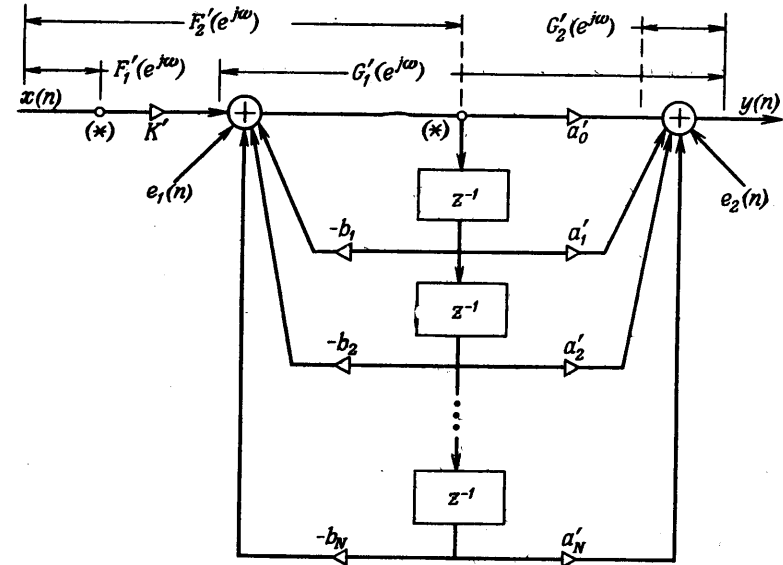
На фиг. 5.20 показана блок-схема построения фильтра N -го порядка в прямой форме. Передаточная функция этого фильтра равна

$$H(z) = \frac{K' \sum_{i=0}^N a_i' z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = \frac{A(z)}{B(z)}. \quad (5.47)$$

Узлы разветвления отмечены звездочками. Единственным масштабирующим множителем, отличным от 1,0, является величина K' , определяемая следующим образом:

$$K' = \frac{1}{\| \frac{1}{B} \|_p}. \quad (5.48)$$

[Формула (5.48) получается из неравенства (5.43), обе части которого были приравнены, чтобы обеспечить наибольшее возможное отношение сигнал/шум на выходе фильтра.] После выбора значения p (обычно $p = 1, 2$ или ∞) по формуле (5.48) рассчиты-



Фиг. 5.20. Шумовая модель прямой формы построения фильтра N -го порядка (по Джексоу).

вается величина K' , что и завершает определение параметров фильтра (относящихся к динамическому диапазону и шуму округления).

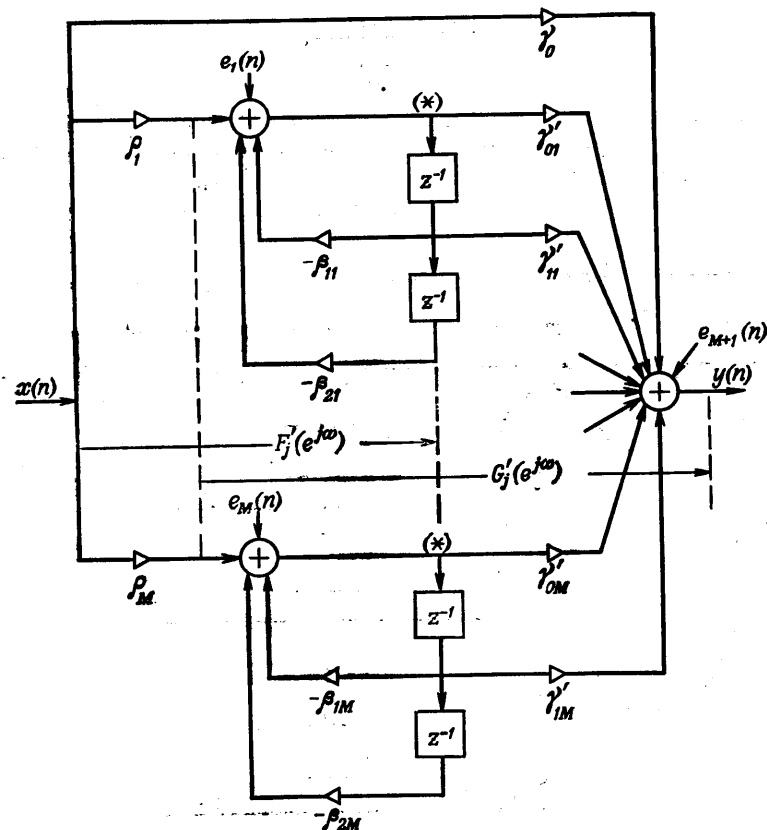
С помощью величины K' , определенной из формулы (5.48), можно найти спектральную плотность мощности выходного шума

$$N_y(e^{j\omega}) = \frac{Q^2}{12} (N+1) \left[1 + \left\| \frac{1}{B} \right\|_p^2 |H(e^{j\omega})|^2 \right]. \quad (5.49)$$

Дисперсия выходного шума получается из формулы (5.49) с помощью соотношения $\sigma_y^2 = \|N_y\|_1$.

5.14. Ограничение динамического диапазона при построении фильтров в параллельной форме

На фиг. 5.21 изображена блок-схема построения фильтра N -го



Фиг. 5.21. Шумовая модель параллельной формы построения фильтра N -го порядка (по Джексоу).

порядка в параллельной форме с передаточной функцией

$$H(z) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^M \rho_i \frac{\gamma'_{1i} z^{-1} + \gamma'_{0i}}{1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2}} = \gamma_0 + \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i(z)}{\beta_i(z)}. \quad (5.50)$$

Масштабирующие множители ρ_i имеют вид

$$\rho_i = \frac{1}{\|F_i\|_p}, \quad (5.51)$$

где $F_i(e^{j\omega})$ — передаточная функция участка фильтра от входа до i -го узла разветвления, определяемая соотношением

$$F_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{\beta_i(e^{j\omega})}. \quad (5.52)$$

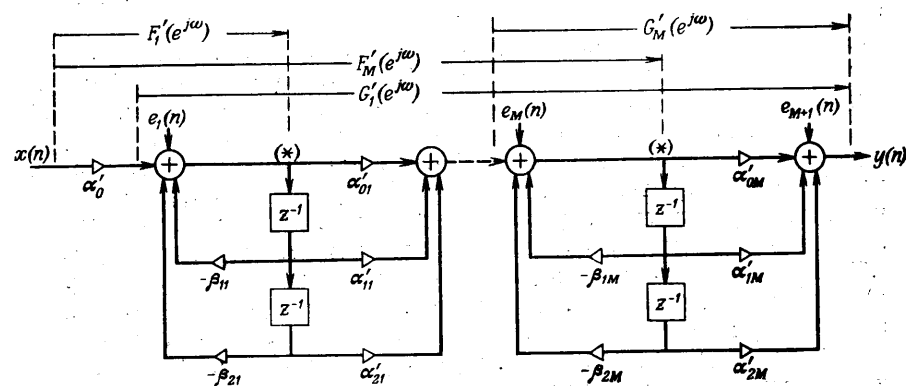
Спектральная плотность мощности шума округления на выходе фильтра, изображенного на фиг. 5.21, равна

$$N_y(e^{j\omega}) = \frac{Q^2}{12} \left[(N+1) + \sum_{j=1}^M k_j \left\| \frac{1}{\beta_j} \right\|_p^2 \left| \frac{\gamma_j(e^{j\omega})}{\beta_j(e^{j\omega})} \right|^2 \right], \quad (5.53)$$

где k_j — общее число источников шума, подключенных к j -му узлу суммирования (обычно $k_j = 3$).

5.15. Ограничение динамического диапазона при построении фильтров в каскадной форме

На фиг. 5.22 приведена блок-схема построения фильтра в кас-



Фиг. 5.22. Шумовая модель каскадной формы построения фильтра N -го порядка (по Джексоу).

кадной форме с передаточной функцией

$$H(z) = \alpha_0 \prod_{i=1}^M \frac{1 + \alpha_1 i z^{-1} + \alpha_2 i z^{-2}}{1 + \beta_1 i z^{-1} + \beta_2 i z^{-2}} = \alpha_0 \prod_{i=1}^M \frac{\alpha_i(z)}{\beta_i(z)}. \quad (5.54)$$

С учетом масштабирующих множителей можно записать

$$H(z) = \alpha'_0 \prod_{i=1}^M \frac{\alpha'_i(z)}{\beta_i(z)} = \alpha'_0 \prod_{i=1}^M \frac{\alpha'_{0i} + \alpha'_{1i} z^{-1} + \alpha'_{2i} z^{-2}}{\beta_i(z)}. \quad (5.55)$$

Масштабирующие множители определяются из соотношений

$$\alpha'_0 = \frac{1}{\|F_1\|_p}, \quad \alpha'_i(z) = \frac{\|F_i\|_p}{\|F_{i+1}\|_p} \alpha_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5.56)$$

причем $\|F_{M+1}\|_p = 1/\alpha_0$.

Окончательная формула для дисперсии выходного шума (с учетом масштабирования) имеет вид

$$\sigma_y^2 = \|N_y\|_1 = \frac{Q^2}{12} \left(k'_{M+1} + \alpha_0 \sum_{j=1}^M k'_j \left\| \frac{1}{\beta_j} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right\|_p^2 \left\| \prod_{i=j}^M \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right\|_2^2 \right), \quad (5.57)$$

где k'_j — общее число источников шума, подключенных к j -му узлу суммирования (обычно $k'_j = 5$).

5.16. Упорядочение размещения блоков и попарный подбор нулей и полюсов блоков при построении фильтра в каскадной форме

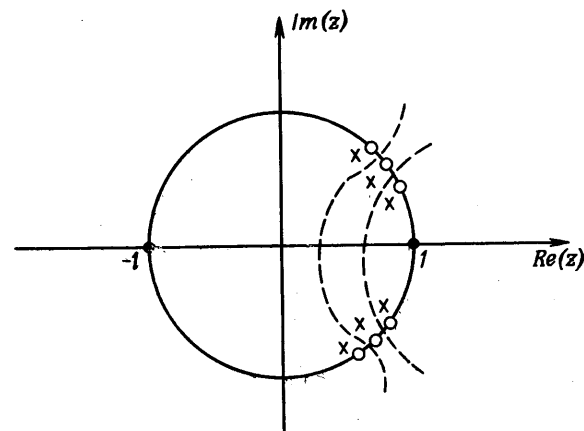
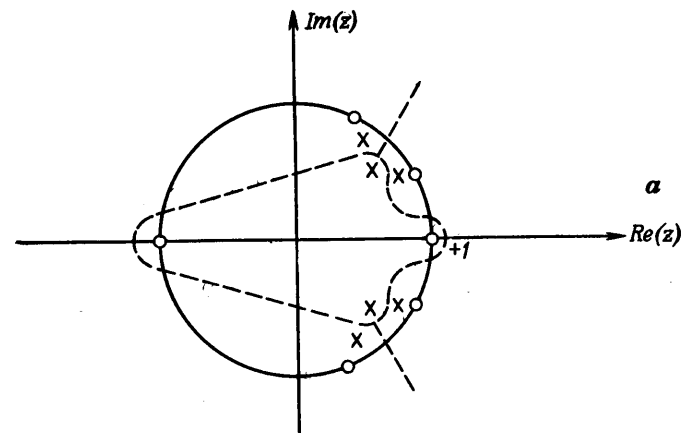
Из формулы (5.57) видно, что дисперсия выходного шума зависит от *порядка*, в котором включены M блоков, образующих фильтр, а также от способа *попарного* подбора нулей и полюсов передаточных функций отдельных блоков. При анализе формул для норм выходного шума округления в пространстве L_r ($r = 1, \infty$) можно заметить, что каждый член этих формул соответствует шуму, создаваемому в одном из блоков фильтра. В каждом из этих членов используются нормы как в L_p , так и в L_{r+1} . Это означает, что требования к масштабированию в данном блоке определяют все предшествующие блоки (поэтому появляется норма в L_p), а последующие блоки фильтруют возникающий в нем шум округления (поэтому появляется норма в L_{r+1}). Таким образом, в двух наиболее важных случаях (когда $p = 2$, $r = \infty$ и $r = 1$, $p = \infty$) различие между фильтрами с неодинаковой последовательностью включения M блоков связано с различием норм в пространствах L_∞ и L_2 . Норма в пространстве L_∞ определяется наибольшими значениями ее аргумента, так что можно ожидать, что наиболее удачным будет такое упорядочение блоков, при кото-

ром функции, являющиеся аргументами норм в пространстве L_∞ , не будут иметь больших выбросов. Поэтому блоки следует располагать в порядке убывания (если $r = \infty$) или возрастания (если $p = \infty$) этих выбросов.

Разумной мерой уровня выбросов (по Джексону) является отношение

$$\rho_i = \frac{\|\alpha_i/\beta_i\|_\infty}{\|\alpha_i/\beta_i\|_2}. \quad (5.58)$$

Таким образом, если $p = 2$, $r = \infty$, то блоки должны располагаться в порядке убывания значений ρ_i . Если же $r = 1$, $p = \infty$, то блоки следует располагать в порядке возрастания ρ_i .



Фиг. 5.23. Попарная группировка нулей и полюсов двух различных фильтров (по Джексону).

Если $p = 2$, $r = 1$ или $p = \infty$, $r = \infty$, то при расчете выходного шума используется только одна норма. В этих случаях можно считать, что наилучшее упорядочение блоков должно получаться при увеличении ρ_i по мере возрастания номера блока, хотя влияние порядка размещения блоков здесь выражено не столь заметно, как в других случаях.

Остался нерассмотренным вопрос о попарном подборе нулей и полюсов отдельных блоков. Поскольку в формулах для выходного шума округления слагаемые числителя $\alpha_i(e^{j\omega})$ фигурируют только в отношении вида $\alpha_i(e^{j\omega})/\beta_i(e^{j\omega})$, то целесообразно минимизировать норму этих отношений в L_∞ , т. е. минимизировать $\|\alpha_i/\beta_i\|_\infty$. Во многих случаях это правило приводит к объединению в пары полюсов с ближайшими к ним нулями в z -плоскости. На фиг. 5.23, а и б показана такая попарная группировка нулей и полюсов для полосового и режекторного фильтров шестого порядка.

5.17. Выводы относительно взаимосвязи между динамическим диапазоном и уровнем шума округления

В фильтре с фиксированной запятой спектр шума округления на выходе имеет вид

$$N_y(e^{j\omega}) = \frac{Q^2}{12} \sum_i k_j |G_j'(e^{j\omega})|^2, \quad (5.59)$$

где $G_j'(e^{j\omega})$ — масштабированная передаточная функция участка фильтра от j -го узла суммирования до выхода, а k_j — число источников шума, подключенных к этому узлу.

Если $F_i'(e^{j\omega})$ — масштабированная передаточная функция участка фильтра от входа до i -го узла разветвления (на котором должны выполняться ограничения, связанные с обеспечением динамического диапазона), то

$$\|F_i'\|_p \leq 1, \quad p \geq 1, \quad (5.60)$$

причем $\|F_i'\|_p$ — норма $F_i'(e^{j\omega})$ в пространстве L_p , определяемая соотношением

$$\|F_i'\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_i'(e^{j\omega})|^p d\omega \right]^{1/p}. \quad (5.61)$$

Для максимизации отношения сигнал/шум в формуле (5.60) следует использовать знак равенства и с ее помощью находить масштабные множители s_i из соотношений

$$F_i'(e^{j\omega}) = s_i F_i(e^{j\omega}) \quad (5.62)$$

или

$$s_i = \frac{1}{\|F_i\|_p}. \quad (5.63)$$

После определения масштабирующих множителей s_i нетрудно получить выражения для масштабированных передаточных функций G_j' ($e^{j\omega}$) и с помощью формулы (5.59) для спектра шума округления на выходе фильтра. Дисперсия выходного шума равна норме $N_y(e^{j\omega})$ в L_1 , т. е.

$$\sigma_y^2 = \|N_y\|_1, \quad (5.64)$$

а максимальное значение его энергетического спектра равно норме $N_y(e^{j\omega})$ в пространстве L_∞ , т. е.

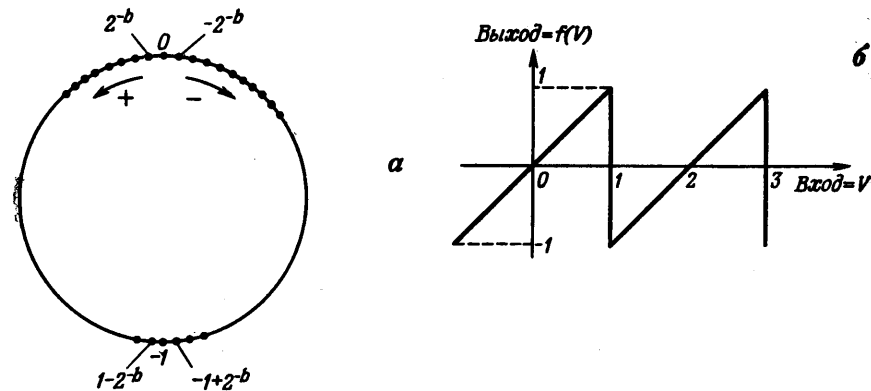
$$\max_{\omega} [N_y(e^{j\omega})] = \|N_y\|_\infty. \quad (5.65)$$

На основе приведенных выше соотношений были получены формулы для выходного шума фильтров прямой, параллельной и каскадной форм. В заключение был рассмотрен вопрос о попарной группировке нулей и полюсов при построении фильтра в каскадной форме.

5.18. Дополнительные замечания о взаимосвязи между динамическим диапазоном и уровнем шума округления

Следует сделать еще несколько замечаний относительно взаимосвязи между динамическим диапазоном и шумом округления в рекурсивных структурах. Выше рассматривалось квантование только с использованием округления. Если воспользоваться усечением, то наиболее существенное отличие будет состоять в том, что все источники шума, подключаемые к узлам суммирования, будут иметь ненулевые средние. Следовательно, и среднее значение шума на выходе будет отлично от нуля. Однако дисперсия ошибок усечения и округления одинаковы, поэтому дисперсия выходного шума при усечении будет такой же, как и при округлении. Использование усечения в первом приближении не требует изменения масштабирующих множителей. Однако из-за появления ненулевого среднего в выходном шуме предпочтение обычно отдают округлению.

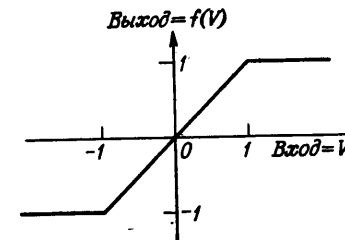
Третий способ квантования, заключающийся в усечении чисел, представленных в прямом коде (с модулем и знаком), приводит к тому, что источники шума в узлах суммирования становятся коррелированными с входным сигналом (напомним, что ошибка полужительна при положительных значениях сигнала и отрицательна при отрицательных). Поэтому предположения, использованные при вычислении дисперсии выходного шума, в данном случае не справедливы, так что все формулы для расчета дисперсии выходного



Фиг. 5.24. Характеристика сумматора чисел в дополнительном коде (по Эберту, Мазо и Тейлору).

шума будут неверны. На практике этот способ квантования весьма, трудно анализировать, а дисперсия ошибки получается больше чем при округлении или при обычном усечении, поэтому его стараются не использовать. Однако в некоторых типах ЦВМ при реализации отдельных команд, возможно, придется использовать именно этот метод квантования.

В заключение рассмотрим, что произойдет, если, несмотря на масштабирование, сумма входных чисел сумматора в цифровом фильтре превысит максимально допустимый уровень (равный 1,0). Если числа представлены в обратном или дополнительном коде, как это обычно и бывает, то переполнения в процессе суммирования вполне допустимы, если только окончательная сумма меньше 1,0. На фиг. 5.24, а это обстоятельство проиллюстрировано графически с помощью представления чисел, записанных в дополнительном коде, в виде точек на окружности [все числа являются $(b+1)$ -разрядными]. Таким образом, наибольшее из положительных чисел, равное $1-2^{-b}$, оказывается рядом с наибольшим из отрицательных чисел, равным $-1,0$. Добавление положительного числа эквивалентно перемещению по окружности против часовой стрелки, а добавление отрицательного числа — перемещению по часовой стрелке. Таким образом, если окончательный результат лежит в пределах от $-1,0$ до $1-2^{-b}$, то переполнения в процессе суммирования не играют роли. Иначе говоря, общая характеристика сумматора имеет вид, показанный на фиг. 5.24, б. Переполнение происходит только тогда, когда окончательный результат выходит за пределы интервала $(-1, 1)$. При переполнении фильтр превращается в нелинейное устройство. Эберт, Мазо и Тейлор показали, что за счет переполнений в фильтре могут возникнуть незатухаю-



Фиг. 5.25. Характеристика сумматора с насыщением.

щие колебания. Эти крайне нежелательные колебания необходимо устранить. Эберт, Мазо и Тейлор показали, что простым, но эффективным способом борьбы с ними является замена обычного сумматора чисел в дополнительном коде на сумматор с насыщением. Характеристика такого сумматора изображена на фиг. 5.25. Использование сумматора с подобной характеристикой гарантирует устойчивость фильтра при возникновении переполнений. Естественно, что в эти моменты фильтр становится нелинейным. Можно, однако, показать, что введение насыщения при возникновении переполнений является, по-видимому, наиболее целесообразным подходом. В силу этого сумматоры с насыщением широко применяются в цифровых фильтрах для предотвращения колебаний, вызванных переполнениями.

5.19. Шум округления в рекурсивных структурах с фиксированной запятой

В силу существенных различий между прямой и последовательной формами рекурсивных структур, обычно используемых для построения КИХ-фильтров, эффекты квантования, характерные для этих форм, следует рассматривать отдельно. При этом можно воспользоваться методами, изложенными в предыдущих разделах, если положить, что знаменатель передаточной функции равен 1. Однако среди КИХ-фильтров наибольший интерес представляют фильтры с линейной фазовой характеристикой, для которых ограничения, накладываемые на передаточную функцию $H(z)$ (она должна описываться полиномом и обладать свойством зеркального отображения), настолько существенно влияют на схему построения фильтра, что непосредственное применение в случае рекурсивных фильтров формул, полученных для описания выходного шума в рекурсивных фильтрах, не является элементарной операцией. В связи с этим в разд. 5.20 и 5.21 будут рассмотрены сначала прямая, а затем и каскадная формы построения КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой.

5.20. Шум округления при построении нерекурсивных фильтров в прямой форме

Передаточную функцию КИХ-фильтра можно записать в виде

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}, \quad (5.66)$$

где $\{h(n)\}$ — импульсная характеристика фильтра, состоящая из N отсчетов. (Для удобства будем считать, что N нечетно.) Поскольку фазовая характеристика линейна, то должно выполняться условие

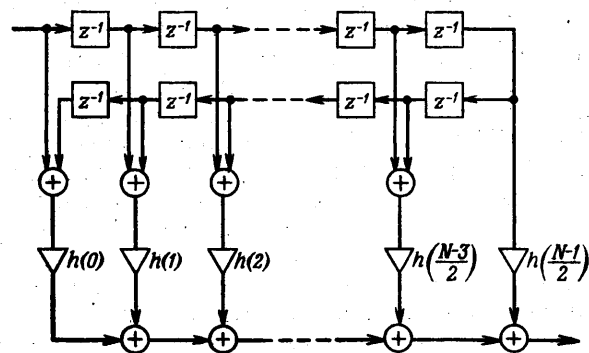
$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (5.67)$$

При этом равенство (5.66) можно преобразовать к виду

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-[(N-1)/2]}. \quad (5.68)$$

На фиг. 5.26 приведена блок-схема построения фильтра в прямой форме в соответствии с формулой (5.68). Видно, что можно обойтись $(N+1)/2$ умножителями, а не N , как в обычной прямой форме.

Свойства шума округления на выходе фильтра зависят от того, в каких точках фильтра производится округление. Возможны два варианта. В первом из них все произведения представляются точно, а округление производится после их сложения, т. е. на выходе фильтра. При этом в схеме имеется только один источник шума, причем шум непосредственно складывается с выходным сигналом. В этом варианте выходной шум округления равномерно



Фиг. 5.26. Прямая форма построения КИХ-фильтра с линейной фазовой характеристикой.

распределен на интервале $[-Q/2, Q/2]$, имеет нулевое среднее и дисперсию, равную $Q^2/12$, где Q — шаг квантования.

Во втором варианте все произведения округляются до суммирования (чтобы увеличить быстродействие фильтра), поэтому выходной шум $e(n)$ является суммой $(N+1)/2$ некоррелированных случайных последовательностей $e_i(n)$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)/2$, каждая из которых имеет равномерное распределение на интервале $[-Q/2, Q/2]$, нулевое среднее и дисперсию, равную $Q^2/12$. В этом случае можно записать

$$e(n) = \sum_{i=0}^{(N-1)/2} e_i(n). \quad (5.69)$$

Очевидно, что среднее значение $e(n)$ равно нулю, а дисперсия

$$\sigma_e^2 = \left(\frac{N+1}{2}\right) \frac{Q^2}{12}. \quad (5.70)$$

Из других видов шума квантования в фильтрах, построенных в прямой форме, обычно присутствует только шум аналого-цифрового преобразования. Покажем, что дисперсия этой составляющей шума на выходе фильтра $\sigma_{\Delta ЦП}^2$ удовлетворяет соотношению

$$\sigma_{\Delta ЦП}^2 \leq \frac{Q^2}{12}, \quad (5.71)$$

т. е. не превышает дисперсии шума округления, связанного с умножениями в фильтре. Обозначим через $\varepsilon(n)$ последовательность на входе фильтра, описывающую шум аналого-цифрового преобразования [$\varepsilon(n)$ распределена в интервале $[-Q/2, Q/2]$ равномерно], а через $\xi(n)$ составляющую выходного шума, вызванную $\varepsilon(n)$, так что $\xi(n)$ удовлетворяет соотношению

$$\xi(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \varepsilon(n-k). \quad (5.72)$$

Очевидно, что среднее значение $\xi(n)$ равно нулю, а дисперсия

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{Q^2}{12} \sum_{n=0}^{N-1} h^2(n) \quad (5.73)$$

или, согласно теореме Парсеваля,

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{Q^2}{12} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (5.74)$$

Можно показать, что в зависимости от выбранного значения масштабировющего множителя (т. е. от выбранной нормы в L_p) будет

выполняться одно из двух соотношений: либо

$$\sum_{n=0}^{N-1} h^2(n) \leq 1 \quad (5.75a)$$

(оно справедливо, если масштабирование производится по сумме модулей отсчетов импульсной характеристики), либо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \leq 1 \quad (5.75b)$$

(при масштабировании с помощью норм в L_p , $p \geq 2$). Таким образом, формула (5.71) будет справедлива в любом случае. Поэтому обычно при построении КИХ-фильтров в прямой форме шумом АЦП можно пренебречь. Отметим, что в приведенных выкладках предполагалось, что шаг квантования в АЦП и при округлении был одинаков, хотя на практике это условие может и не соблюдаться.

5.21. Шум округления при построении нерекурсивных фильтров в каскадной форме

При построении КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой в каскадной форме наибольшее значение начинают приобретать вопросы масштабирования и упорядочения размещения блоков, связанные с максимизацией отношения сигнал/шум на выходе фильтра. Передаточную функцию фильтра при каскадной форме его построения можно представить в виде

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N_s} (b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}) = \prod_{i=1}^{N_s} H_i(z), \quad (5.76)$$

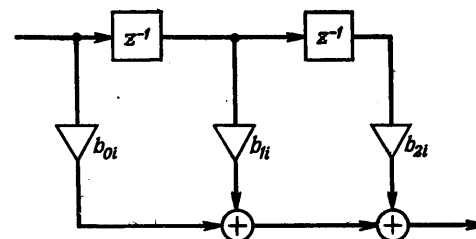
где $N_s = (N - 1)/2$. Для фильтров с линейной фазовой характеристикой коэффициенты b_{ji} , входящие в формулу (5.76), должны удовлетворять одному из двух условий: либо

$$b_{0i} = b_{2i}, \quad (5.77a)$$

либо существует такое $j \neq i$, при котором

$$\frac{b_{0i}}{b_{2j}} = \frac{b_{1i}}{b_{1j}} = \frac{b_{2i}}{b_{0j}}. \quad (5.77b)$$

На фиг. 5.27 изображена схема построения i -го блока фильтра с передаточной функцией (5.76). Из этой схемы и условия (5.77a) видно, что в каждом блоке могут быть два или три множителя, поэтому в шумовой модели блока к его выходу подключаются



Фиг. 5.27. Элементарный блок при построении КИХ-фильтра в каскадной форме с линейной фазовой характеристикой.

k_i источников шума (причем $k_i = 2$ или 3) или же один источник с дисперсией $k_i Q^2/12$. Величину k_i можно понизить до 1, если все произведения складывать до округления, но так как при этом снижается быстродействие фильтра, то обычно такой вариант схемы не используется.

Если определить $G_i(z)$, передаточную функцию части фильтра от $(i + 1)$ -го блока до выхода, как

$$G_i(z) = \begin{cases} \prod_{j=i+1}^{N_s} H_j(z), & 0 < i \leq N_s - 1, \\ 1, & i = N_s \end{cases} \quad (5.78)$$

и обозначить обратное z -преобразование от $G_i(z)$ через $g_i(k)$, то шум округления для каскадной формы фильтра можно представить с помощью шумовой модели, изображенной на фиг. 5.28, а и б. Дисперсия выходного шума определяется соотношением

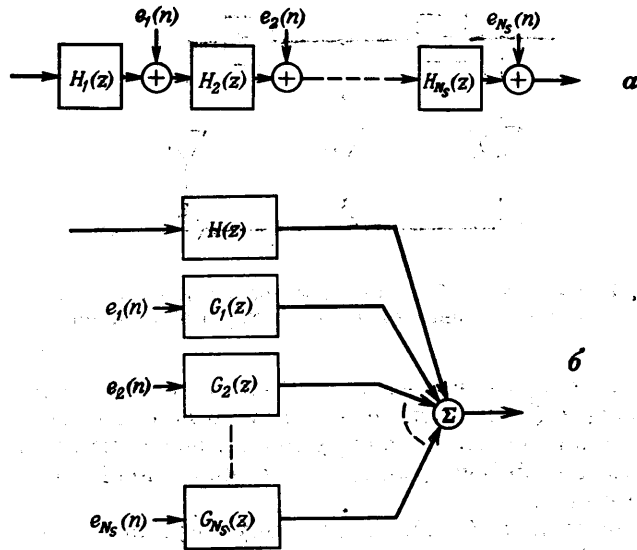
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N_s} k_i \frac{Q^2}{12} \sum_k g_i^2(k). \quad (5.79)$$

Как и в рекурсивных системах, для предотвращения переполнений между блоками необходимо ввести масштабирующие множители. Если передаточную функцию $H_i(z)$ [см. (5.76)] представить в виде

$$H_i(z) = S_i \hat{H}_i(z), \quad (5.80)$$

где S_i — масштабирующий коэффициент для i -го блока, а $\hat{H}_i(z)$ — нормированная передаточная функция вида

$$\hat{H}_i(z) = a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}, \quad (5.81)$$



Фиг. 5.28. Шумовая модель для каскадной формы построения КИХ-фильтра.

причем $a_{0i} \geq 0$, а

$$\sum_{j=0}^2 |a_{ji}| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_s, \quad (5.82)$$

то

$$H(z) = \beta \prod_{i=1}^{N_s} \hat{H}_i(z) = \prod_{i=1}^{N_s} S_i \prod_{i=1}^{N_s} \hat{H}_i(z). \quad (5.83)$$

Если значение β задано, то $(N_s - 1)$ коэффициентов S_i можно выбрать произвольным образом.

Пусть

$$F_i(z) = \sum_{k=0}^{2i} f_i(k) z^{-k} = \prod_{j=1}^i H_j(z), \quad 1 \leq i \leq N_s, \quad (5.84)$$

$$\hat{F}_i(z) = \sum_{k=0}^{2i} \hat{f}_i(k) z^{-k} = \prod_{j=1}^i \hat{H}_j(z), \quad (5.85)$$

а входная последовательность $x(n)$ ограничена по модулю величиной 1,0. При этом выходные последовательности каждого из блоков будут ограничены по модулю величиной 1,0 тогда и только тогда, когда масштабирующие коэффициенты удовлетворяют условию

$$\prod_{j=1}^i |S_j| \leq \left[\sum_{k=0}^{2i} |\hat{f}_i(k)| \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_s. \quad (5.86)$$

С другой стороны, если для спектра входного сигнала выполняется соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})| d\omega \leq 1, \quad (5.87)$$

то необходимым и достаточным условием ограниченности модулей сигналов на выходах всех блоков является неравенство

$$\prod_{j=1}^i |S_j| \leq \left[\max_{0 \leq \omega \leq 2\pi} |\hat{F}_i(e^{j\omega})| \right]^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_s. \quad (5.88)$$

Если для выбора масштабирующих коэффициентов используется формула (5.86) со знаком равенства, то соответствующая методика масштабирования называется *масштабированием по сумме*; при использовании формулы (5.88) также со знаком равенства ее называют *масштабированием по максимуму*. Как уже упоминалось, для рекурсивных БИХ-фильтров масштабирование по сумме является избыточным. Для КИХ-фильтров ситуация меняется, поскольку ограничения, накладываемые на входной сигнал с целью получения равенства в формуле для масштабирующих коэффициентов, уже не являются чересчур жесткими, ибо они относятся к конечному интервалу. Так, чтобы сигнал на выходе первого блока достиг уровня 1,0, необходимо, чтобы во входном сигнале всего лишь три последовательных отсчета равнялись 1,0.

Итак, независимо от выбранного правила масштабирования, остается только определить порядок размещения блоков, при котором шум округления на выходе будет минимальным. Как и в случае рекурсивных каскадных фильтров, невозможно проанализировать все возможные комбинации размещения блоков. Тем не менее экспериментально было показано, что удачным является такой порядок, при котором максимальное значение передаточной функции $G_{i-1}(z)$ ($i = 2, 3, \dots, N_s$) участка фильтра от i -го блока до выхода невелико и при переходе от блока к блоку изменяется незначительно. Кроме того, показано, что для подавляющего большинства вариантов размещения блоков дисперсия выходного шума получается небольшой. Простой алгоритм упорядочения блоков, основанный на практическом опыте проектирования фильтров, формулируется следующим образом:

Начиная с $i = N_s$, в качестве i -го блока выбирать тот, для которого с учетом ранее выбранных блоков сумма

$\sum_k g_{i-1}^2(k)$ получается наименьшей [напомним, что $g_i(k)$ — импульсная характеристика участка фильтра от $(i + 1)$ -го блока до выхода].

С помощью этого алгоритма минимизируются дисперсии составляющих выходного шума, возникающих в отдельных блоках, а не дисперсия полного шума. Однако варианты расположения блоков, дающие малые значения дисперсии выходного шума, встречаются с большой вероятностью, поэтому при всех испытаниях варианты расположения блоков, соответствующие приведенному алгоритму, давали результаты, близкие к оптимальному.

Итак, при проектировании КИХ-фильтров в каскадной форме необходимо выбрать правило масштабирования (выше были сформулированы два таких правила), а затем с помощью предложенного алгоритма найти последовательность расположения блоков, при которой минимизируется дисперсия шума на выходе фильтра. После определения порядка расположения блоков и значений масштабирующих коэффициентов нетрудно вычислить дисперсию выходного шума и величину отношения сигнал/шум для рассчитанного фильтра.

5.22. Шум округления в рекурсивных структурах с плавающей запятой

В этом разделе рассматриваются рекурсивные фильтры, в которых используется система счисления с плавающей запятой. В таких устройствах, как уже было показано, шум округления, величина которого пропорциональна результату операции, образуется и при умножении, и при сложении. Обозначим число x в системе счисления с плавающей запятой символом $fl[x]$, введенным Лиу и Канеко. Таким образом, умножение и сложение двух чисел производятся по следующим правилам:

$$fl[x + y] = (x + y)(1 + \varepsilon), \quad (5.89a)$$

$$fl[x \cdot y] = (x \cdot y)(1 + \delta), \quad (5.89b)$$

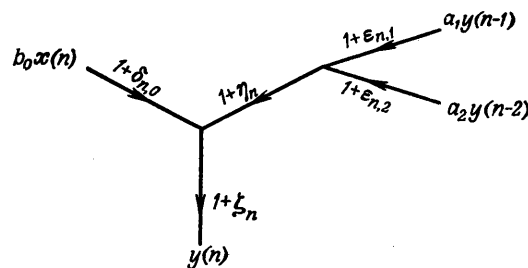
где ε и δ — случайные числа, равномерно распределенные на интервале $-2^{-b} \leq \varepsilon, \delta \leq 2^{-b}$ соответственно (если мантисса содержит $b + 1$ разрядов) и не зависящие от x и y . В системе второго порядка, описываемой разностным уравнением

$$w(n) = b_0 x(n) - [a_1 w(n-1) + a_2 w(n-2)], \quad (5.90)$$

фактически вычисляется величина

$$y(n) = fl\{b_0 x(n) - [a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2)]\}, \quad (5.91)$$

причем сначала вычисляются произведения $a_1 y(n-1)$, $a_2 y(n-2)$, $b_0 x(n)$, а затем они складываются, что дает $y(n)$. Последовательность вычислений показана на фиг. 5.29. Предполагается, что ошибки округления при отдельных операциях являются взаимно независимыми случайными величинами. Таким образом, соотно-



Фиг. 5.29. Квантование в системе второго порядка с плавающей запятой.

нение (5.91) можно переписать в виде

$$y(n) = b_0 \theta_{n,0} x(n) - \sum_{k=1}^2 a_k \Phi_{n,k} y(n-k), \quad (5.92)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{n,0} &= (1 + \delta_{n,0})(1 + \zeta_n), \\ \Phi_{n,1} &= (1 + \varepsilon_{n,1})(1 + \eta_n)(1 + \zeta_n), \\ \Phi_{n,2} &= (1 + \varepsilon_{n,2})(1 + \eta_n)(1 + \zeta_n). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Для расчета характеристик шума округления следует проанализировать сигнал ошибки $e(n) = y(n) - w(n)$.

Рассмотрим, например, фильтр, реализованный в прямой форме и описываемый разностным уравнением

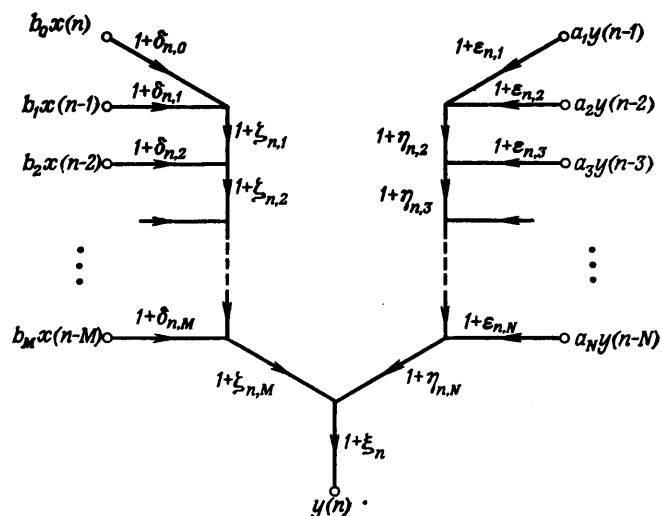
$$y(n) = fl\left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)\right]. \quad (5.94)$$

Направленный граф, соответствующий такому фильтру N -го порядка, изображен на фиг. 5.30. Уравнение (5.94) можно преобразовать к виду

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k \theta_{n,k} x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k \Phi_{n,k} y(n-k), \quad (5.95)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{n,0} &= (1 + \xi_n)(1 + \delta_{n,0}) \prod_{i=1}^M (1 + \zeta_{n,i}), \\ \theta_{n,j} &= (1 + \xi_n)(1 + \delta_{n,j}) \prod_{i=j}^M (1 + \zeta_{n,i}), \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ \Phi_{n,1} &= (1 + \xi_n)(1 + \varepsilon_{n,1}) \prod_{i=2}^N (1 + \eta_{n,i}), \\ \Phi_{n,j} &= (1 + \xi_n)(1 + \varepsilon_{n,j}) \prod_{i=j}^N (1 + \eta_{n,i}), \quad j = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.96)$$



Фиг. 5.30. Квантование в системе N -го порядка с плавающей запятой (по Лиу и Канеко).

Определить статистические свойства шума округления путем непосредственного анализа уравнения (5.95) весьма трудно, так как в него входят случайные коэффициенты $\Phi_{n,k}$ и $\theta_{n,k}$, изменяющиеся во времени. Задача может быть решена с помощью ряда подстановок, в которых фигурируют средние значения случайных коэффициентов. Подробности использования этих подстановок описаны Лиу и Канеко, и приводить их здесь было бы нецелесообразно, так как сами вычисления спектральной плотности мощности выходного шума мало поясняют свойства фильтров. Читателям, интересующимся данным вопросом, можно порекомендовать статью Лиу и Канеко, в которой приведены характеристики шума квантования для трех наиболее распространенных форм построения фильтров с плавающей запятой и округлением: прямой, параллельной и каскадной.

5.23. Квантование коэффициентов

Значения коэффициентов фильтра обычно определяются с помощью какого-либо расчетного метода, причем предполагается, что эти коэффициенты могут быть представлены с неограниченной точностью. На практике их приходится представлять числами с конечным числом разрядов. В результате частотная характеристика реального фильтра отличается от той, которая получилась бы при использовании коэффициентов, представленных с неограниченной точностью.

Существуют два общих подхода к анализу и синтезу цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности. В первом из них погрешности представления коэффициентов рассматриваются как случайные величины. При этом влияние квантования коэффициентов учитывается введением паразитного фильтра, включенного параллельно соответствующему идеальному фильтру. Тогда, сделав определенные предположения относительно погрешностей коэффициентов, можно оценить среднее квадратическое отклонение частотной характеристики реального фильтра от характеристики идеального фильтра.

При использовании второго подхода вопрос о квантовании коэффициентов решается отдельно для каждого конкретного фильтра. При этом коэффициенты, представляемые с конечной точностью, можно оптимизировать так, чтобы максимум взвешенной разности характеристик идеального и реального фильтров был минимальным. Хотя при таком подходе и не удастся получить общих рекомендаций о квантовании коэффициентов, но зато приближение к заданной частотной характеристике получается наилучшим.

В последующих разделах представлены примеры применения обоих подходов.

5.24. Квантование коэффициентов в рекурсивных структурах

Влияние погрешностей коэффициентов на характеристики фильтра одним из первых исследовал Кайзер. Рассматривая прямую форму построения фильтров, он нашел абсолютную границу для ошибки представления коэффициентов, гарантирующую устойчивость фильтра. Однако найденная граница оказалась чересчур пессимистичной, так как при выводе Кайзер рассматривал процесс квантования коэффициентов как детерминированный. Тем не менее он убедительно показал, что для любого достаточно сложного фильтра с резким изменением характеристики в переходной полосе применять прямую форму не следует, так как характеристики получающихся фильтров крайне чувствительны к значениям коэффициентов.

Ноулс и Олкейто решали задачу квантования коэффициентов с помощью статистических методов. В основе их подхода лежит предположение о том, что погрешности представления коэффициентов разностного уравнения являются равномерно распределенными случайными величинами с нулевыми средними. В разд. 5.25 в качестве примера рассматривается влияние квантования коэффициентов на характеристики фильтра, реализованного в прямой форме.

5.25. Квантование коэффициентов при построении фильтров в прямой форме

Допустим, что реальный цифровой фильтр с квантованными коэффициентами (т. е. представленными с конечной точностью) имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}. \quad (5.97)$$

Коэффициенты фильтра можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_k &= \bar{a}_k + \alpha_k, \\ b_k &= \bar{b}_k + \beta_k, \end{aligned} \quad (5.98)$$

где \bar{a}_k и \bar{b}_k — точные значения коэффициентов, а α_k и β_k — погрешности их квантования, являющиеся статистически независимыми случайными величинами с равномерными распределениями. Если обозначить через $x(n)$ и $y'(n)$ входную и выходную последовательности реального фильтра (считаем, что арифметические действия выполняются точно), а через $y(n)$ отклик идеального фильтра на ту же входную последовательность, то ошибку на выходе $e(n)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} e(n) = y'(n) - y(n) &= \left[\sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y'(n-k) \right] - \\ &- \left[\sum_{k=0}^N \bar{a}_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N \bar{b}_k y(n-k) \right], \end{aligned} \quad (5.99)$$

т. е.

$$\begin{aligned} e(n) &= \sum_{k=0}^N \alpha_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N \bar{b}_k e(n-k) - \\ &- \sum_{k=1}^N \beta_k y(n-k) - \sum_{k=1}^N \beta_k e(n-k) \end{aligned} \quad (5.100)$$

Отсюда, пренебрегая членами второго порядка, получим

$$e(n) = \sum_{k=0}^N \alpha_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N \bar{b}_k e(n-k) - \sum_{k=1}^N \beta_k y(n-k). \quad (5.101)$$

Вычисляя z -преобразования от правой и левой частей соотношения (5.101), получим

$$\alpha(z) X(z) - \beta(z) Y(z) - E(z) B_\infty(z) = 0, \quad (5.102)$$

где

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k}, \quad (5.103a)$$

$$\beta(z) = \sum_{k=1}^N \beta_k z^{-k}, \quad (5.103б)$$

$$A_\infty(z) = \sum_{k=0}^N \bar{a}_k z^{-k}, \quad (5.103в)$$

$$B_\infty(z) = 1 + \sum_{k=1}^N \bar{b}_k z^{-k}, \quad (5.103г)$$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(k) z^{-k}. \quad (5.103д)$$

Поскольку

$$Y(z) = H_\infty(z) X(z), \quad (5.104)$$

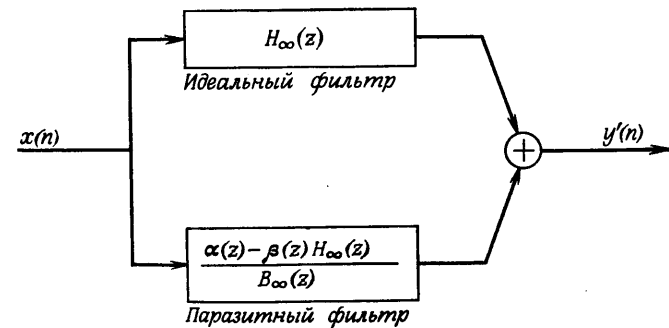
из формулы (5.102) найдем, что

$$E(z) = \left[\frac{\alpha(z) - \beta(z) H_\infty(z)}{B_\infty(z)} \right] X(z). \quad (5.105)$$

Решая систему уравнений (5.99), (5.104) и (5.105) относительно $Y'(z)$, получим

$$Y'(z) = \left[H_\infty(z) + \frac{\alpha(z) - \beta(z) H_\infty(z)}{B_\infty(z)} \right] X(z). \quad (5.106)$$

Таким образом, реальный фильтр можно представить в виде параллельно соединенных идеального фильтра и паразитного фильтра, как показано на фиг. 5.31.



Фиг. 5.31. Модель фильтра с квантованными коэффициентами (по Ноулсу и Олкейто).

Одной из возможных количественных характеристик эффектов, связанных с квантованием коэффициентов, является среднеквадратическая ошибка частотной характеристики, которую нетрудно определить из соотношения (5.106):

$$\sigma^2 = E \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |H'(e^{j\omega}) - H_{\infty}(e^{j\omega})|^2 d\omega \right], \quad (5.107)$$

причем $H'(e^{j\omega}) = Y'(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$, а символ E обозначает операцию усреднения. Используя предположение о взаимной статической независимости коэффициентов α_k , β_k и входной последовательности, из формулы (5.107) можно получить

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\alpha(z) - \beta(z)H_{\infty}(z)}{B_{\infty}(z)} \right] \left[\frac{\alpha(z^{-1}) - \beta(z^{-1})H_{\infty}(z^{-1})}{B_{\infty}(z^{-1})} \right] \frac{dz}{z} \right\} = \\ &= \left(\sum_{k=0}^N \overline{\alpha_k^2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{B_{\infty}(z)B_{\infty}(z^{-1})} \frac{dz}{z} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^N \overline{\beta_k^2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A_{\infty}(z^{-1})A_{\infty}(z)}{[B_{\infty}(z^{-1})]^2[B_{\infty}(z)]^2} \frac{dz}{z}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

При квантовании коэффициентов с применением округления величины α_k и β_k удовлетворяют соотношениям

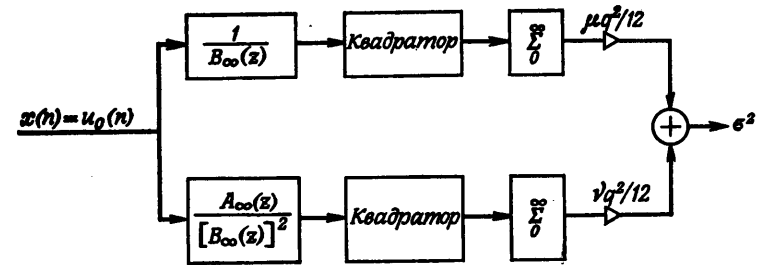
$$|\alpha_k| \leq \frac{q}{2}, \quad (5.109a)$$

$$|\beta_k| \leq \frac{q}{2}, \quad (5.109b)$$

$$\sum_{k=0}^N \overline{\alpha_k^2} = \mu \frac{q^2}{12}, \quad (5.109в)$$

$$\sum_{k=0}^N \overline{\beta_k^2} = \nu \frac{q^2}{12}, \quad (5.109г)$$

где q — величина шага квантования, а μ и ν — числа коэффициентов, стоящих соответственно в числителе и знаменателе и не равных нулю или единице. Исходя из соотношений (5.109в) и (5.109г), дисперсию σ^2 , описываемую формулой (5.108), удобно рассчитать, предположив, что на вход системы, изображенной на фиг. 5.32, подан цифровой единичный импульс. Интегралы, фигурирующие в формуле (5.108), заменены здесь на бесконечные суммы в соответствии с теоремой Парсеваля. На практике суммируется конечное число слагаемых.

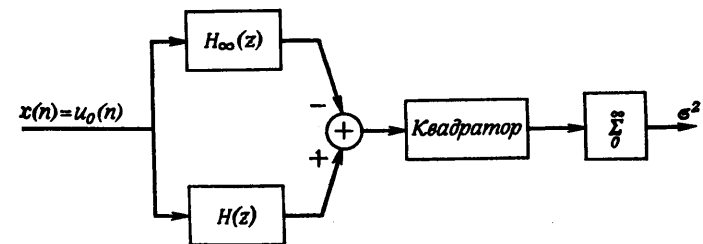


Фиг. 5.32. Методика измерения дисперсии ошибки, связанной с квантованием коэффициентов (по Ноулсу и Олкейто).

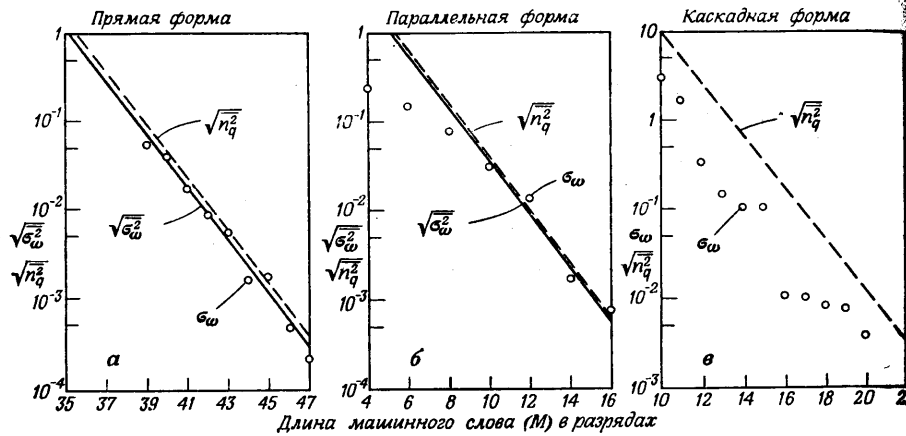
Аналогичные формулы для дисперсии шума округления коэффициентов можно получить и для случаев построения фильтров в параллельной или каскадной форме. Мы не будем приводить здесь все эти формулы, а перейдем к изложению результатов экспериментальной проверки правильности рассмотренной статистической модели.

5.26. Экспериментальная проверка шумовой модели квантования коэффициентов

Описанная статистическая модель была экспериментально изучена Ноулсом и Олкейто на примере эллиптического режекторного фильтра 22-го порядка. Для измерения σ^2 при различной длине машинного слова использовалась система, изображенная на фиг. 5.33. Работа системы с передаточной функцией $H_{\infty}(z)$ моделировалась с применением 80-разрядных коэффициентов. На фиг. 5.34, а—в для прямой, параллельной и каскадной форм приведены значения σ^2 , рассчитанные и измеренные с помощью системы фиг. 5.33. Для прямой формы рассчитанные значения отли-



Фиг. 5.33. Методика измерения дисперсии ошибки, связанной с квантованием коэффициентов (по Ноулсу и Олкейто).



Фиг. 5.34. Дисперсия ошибки, связанной с квантованием коэффициентов, для некоторых рекурсивных структур (по Ноулсу и Олкейто).

чаются от измеренных значений не более чем в два раза. Для параллельной формы теория и эксперимент дают хорошее совпадение вплоть до длины слова порядка восьми разрядов, после чего влияние погрешностей квантования коэффициентов 2-го порядка становится существенным. Для каскадной формы приведены только измеренные значения σ^2 , так как теоретические оценки найти в данном случае затруднительно. Из фиг. 5.34 видно, что при заданном числе разрядов наименьшее искажение характеристик получается для параллельной формы, а наибольшее, как и ожидалось, — для прямой.

5.27. Оптимальное квантование коэффициентов

Анализ квантования коэффициентов, проведенный в предыдущих разделах, показывает, что процесс квантования по своему характеру является статистическим. Поэтому, сделав предположение о справедливости используемой модели, можно получить некоторые вероятностные оценки, характеризующие степень совпадения фактически получаемой и идеальной частотных характеристик фильтра. Такие оценки весьма полезны, так как с их помощью разработчик для широкого класса фильтров может найти число разрядов, необходимое для представления коэффициентов, даже не зная конкретных значений коэффициентов реального фильтра. Во многих случаях, однако, желательно оптимизировать значения квантованных коэффициентов таким образом, чтобы свести к минимуму некоторую величину, являющуюся оценкой характеристики получаемого фильтра.

Авенхаус и Шусслер в качестве такой величины предложили использовать отношение

$$\varepsilon(\omega) = \frac{H_D(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})}{\delta(\omega)}, \quad (5.110)$$

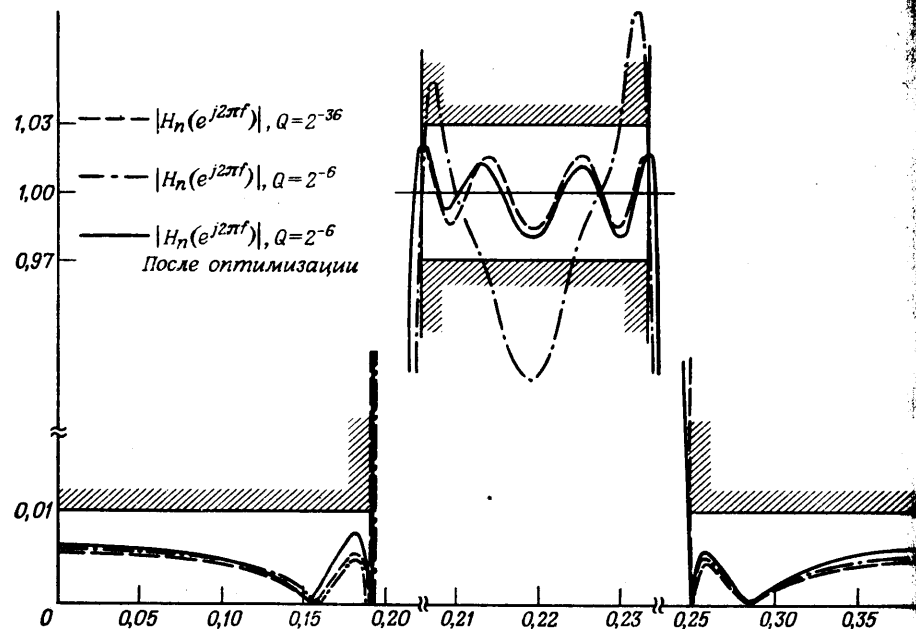
где $H_D(e^{j\omega})$ и $H(e^{j\omega})$ — заданная и фактически получаемая (при использовании квантованных коэффициентов) частотные характеристики, а $\delta(\omega)$ — функция допуска. Для фильтра нижних частот, например, функции $H_D(e^{j\omega})$ и $\delta(\omega)$ можно определить следующим образом:

$$H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi, \\ \Phi - \text{произвольное}, & \omega_p < \omega < \omega_s, \end{cases}$$

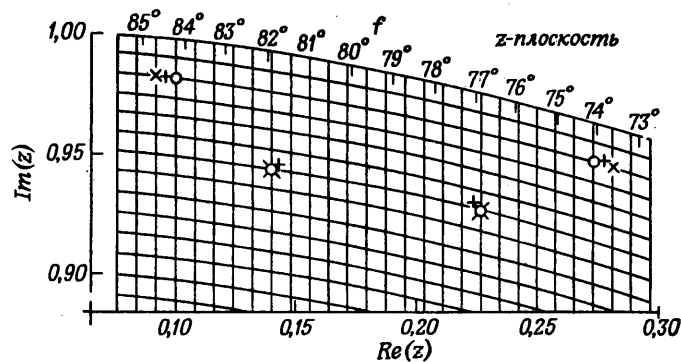
$$\delta(\omega) = \begin{cases} \delta_1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ \delta_2, & \omega_s \leq \omega \leq \pi, \\ \infty, & \omega_p < \omega < \omega_s. \end{cases}$$

Авенхаус и Шусслер предложили для оценки характеристики реального фильтра использовать максимальное значение $\varepsilon_{\max}(\omega)$. Если $\varepsilon_{\max}(\omega)$ не превышает 1,0, то считается, что характеристика фильтра не выходит за пределы заданного допуска. Если же $\varepsilon_{\max}(\omega) > 1,0$, то фильтр будет неприемлемым, так что разрядность коэффициентов фильтра необходимо увеличивать.

Авенхаус и Шусслер использовали процедуру оптимизации для определения квантованных коэффициентов на дискретном множестве значений по критерию минимизации $\varepsilon_{\max}(\omega)$. Им удалось заметно улучшить характеристики фильтра по сравнению со случаем простого округления коэффициентов, которое описывается статистической моделью, рассмотренной в разд. 5.26. На фиг. 5.35 и 5.36 показаны частотные характеристики, а также расположение нулей и полюсов в z -плоскости для полосового эллиптического фильтра восьмого порядка. При 36-разрядных коэффициентах показатель качества фильтра $\varepsilon_{\max}(\omega)$ равнялся 0,526054. При округлении коэффициентов фильтра до восьми разрядов (причем $Q = 2^{-6}$, а два остальных разряда использовались для представления знака и целой части, поскольку величина коэффициентов может достигать 2,0) получается, что $\varepsilon_{\max}(\omega) \approx 1,07$, т. е. фильтр оказывается неприемлемым. Наименьшее число разрядов, до которого можно было округлять 36-разрядные коэффициенты и при котором $\varepsilon_{\max}(\omega) \leq 1,0$, равно 11. Однако после оптимизации удалось найти набор 8-разрядных коэффициентов, при котором $\varepsilon_{\max}(\omega) = 0,897$. Таким образом, применение оптимизации дало выигрыш в три разряда по сравнению с простым округлением.



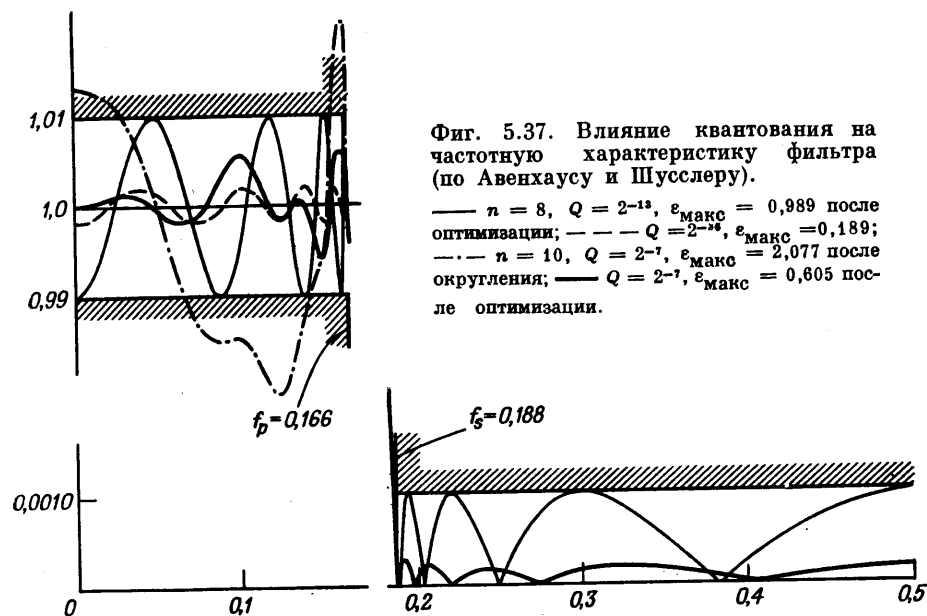
Фиг. 5.35. Влияние оптимизации коэффициентов фильтра на его частотную характеристику (по Авенхаусу и Шусслеру).



Фиг. 5.36. Расположение нулей и полюсов оптимизированного фильтра (по Авенхаусу и Шусслеру).

+ решение при $k = 36$; \circ после округления до $k = 6$; \times после оптимизации при $k = 6$.

При сравнении результатов применения описанной методики для расчета различных вариантов построения фильтра возникают интересные ситуации. Поскольку в фильтре с неквантованными коэффициентами значение $\epsilon_{\max}(\omega)$ должно быть меньше 1,0 (ина-



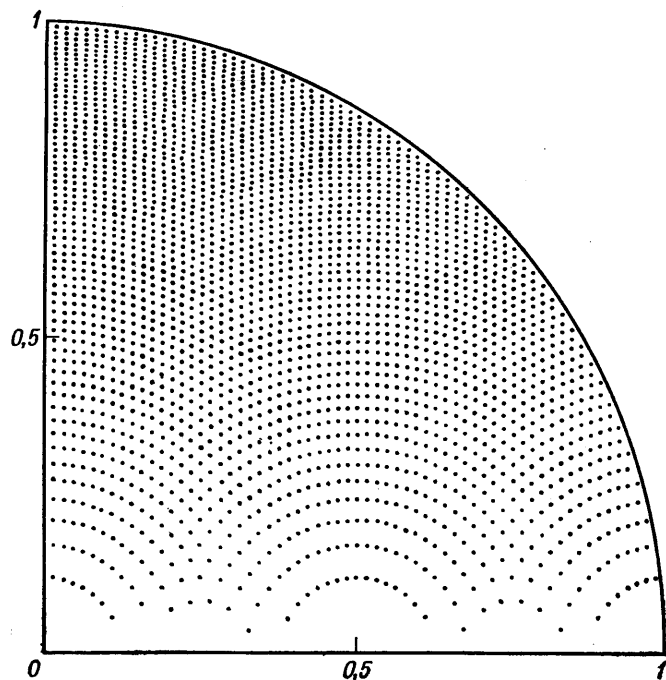
Фиг. 5.37. Влияние квантования на частотную характеристику фильтра (по Авенхаусу и Шусслеру).

— $n = 8$, $Q = 2^{-13}$, $\epsilon_{\max} = 0,989$ после оптимизации; — — — $Q = 2^{-36}$, $\epsilon_{\max} = 0,189$; - - - $n = 10$, $Q = 2^{-7}$, $\epsilon_{\max} = 2,077$ после округления; — $Q = 2^{-7}$, $\epsilon_{\max} = 0,605$ после оптимизации.

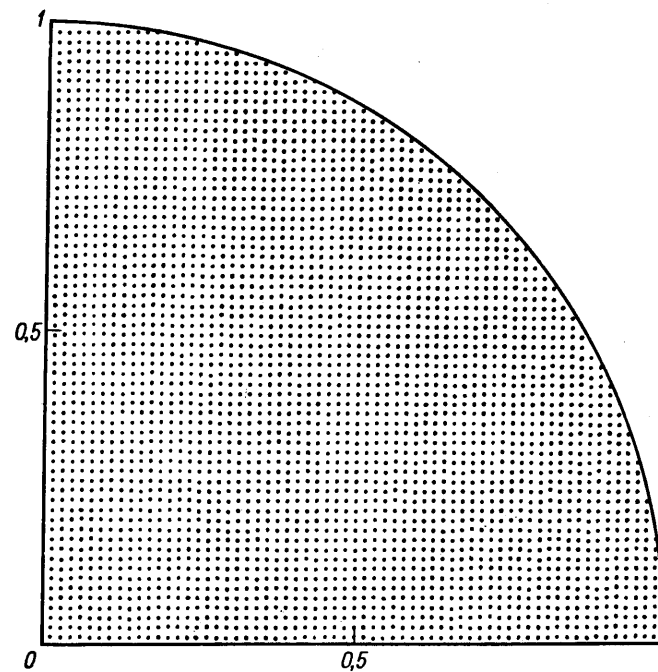
че ни один из фильтров с квантованными коэффициентами не будет приемлемым), то величину $\epsilon_{\max}(\omega)$ всегда можно уменьшить, увеличив порядок фильтра и не меня остальных его параметров. В связи с этим возникает вопрос, целесообразно ли повышать порядок фильтра с тем, чтобы уменьшить разрядность его коэффициентов (при этом исходное значение $\epsilon_{\max}(\omega)$ будет меньше), либо предпочтительнее использовать фильтр меньшего порядка. Подобная ситуация для случая эллиптического фильтра нижних частот иллюстрируется на фиг. 5.37. Восьмой порядок — это наименьший порядок, при котором фильтр еще удовлетворяет заданным требованиям. После оптимизации квантованных коэффициентов оказалось, что для достижения $\epsilon_{\max}(\omega) = 0,989$ необходимы 15-разрядные коэффициенты. Эллиптический фильтр 10-го порядка также удовлетворяет заданным требованиям, причем $\epsilon_{\max}(\omega) = 0,189$, если разрядность коэффициентов равна 36. При округлении коэффициентов до девяти разрядов $\epsilon_{\max}(\omega) = 2,077$, но после оптимизации $\epsilon_{\max}(\omega)$ уменьшается до 0,605. Возникает вопрос, что лучше: фильтр из четырех блоков с 15-разрядными коэффициентами или фильтр из пяти блоков с 9-разрядными коэффициентами. Ответ на этот вопрос может быть дан только с учетом требований к быстродействию фильтра, величины допустимого шума округления, аппаратных затрат на увеличение разрядности умножителей и т. д.

5.28. Квантование коэффициентов в двухполюсном фильтре

Блоки второго порядка являются основными звеньями, из которых собираются фильтры более высокого порядка (как в каскадной, так и в параллельной форме), поэтому целесообразно подробно исследовать чувствительность характеристик таких блоков к значениям их коэффициентов. При построении блока второго порядка в прямой форме основными коэффициентами являются $-r^2$ и $2r \cos \theta$. Полюсы располагаются в точках $z = re^{\pm j\theta}$. Если способ квантования коэффициентов $-r^2$ и $2r \cos \theta$ известен, то полюсы могут располагаться только в дискретном множестве точек на z -плоскости, образованном пересечениями концентрических окружностей, соответствующих квантованным значениям r^2 , и вертикальных прямых, соответствующих квантованным значениям $r \cos \theta$. Такая сетка точек, соответствующая 6-разрядному квантованию обоих коэффициентов, изображена на фиг. 5.38. Точки размещены на z -плоскости весьма неравномерно. Хотя это само по себе и несущественно, но отражает тот факт, что ошибка, связанная



Фиг. 5.38. Возможные положения полюсов для прямой формы построения фильтра второго порядка.



Фиг. 5.39. Возможные положения полюсов для связанной формы построения фильтра второго порядка, состоящего из двух блоков первого порядка.

с квантованием коэффициентов, сильно зависит от исходного расположения полюсов фильтра.

Другой формой построения блока второго порядка является связанная форма, предложенная Рэйдером и Гоулдом. Совокупность различных уравнений первого порядка, соответствующая этой форме, имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(n) &= r(\cos\theta) y_1(n-1) - r(\sin\theta) y_2(n-1) + x(n), \\ y_2(n) &= r(\sin\theta) y_1(n-1) + r(\cos\theta) y_2(n-1), \\ y(n) &= y_1(n). \end{aligned}$$

Коэффициентами фильтра являются $r \cos \theta$ и $r \sin \theta$, поэтому полюсы располагаются в z -плоскости на прямоугольной сетке точек, как показано на фиг. 5.39. Отсюда следует, что при построении блока второго порядка в связанной форме максимальное смещение полюсов, вызванное квантованием коэффициентов, не зависит от исходного расположения полюсов в z -плоскости.

5.29. Квантование коэффициентов в рекурсивных структурах

В случае рекурсивных КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой можно получить более конкретные, чем для рекурсивных фильтров, оценки эффектов квантования коэффициентов. Для фильтров прямой формы будут найдены статистические границы ошибки частотной характеристики, связанной с округлением коэффициентов. Для фильтров каскадной формы будут приведены лишь некоторые экспериментальные данные о чувствительности такой структуры к погрешностям коэффициентов за счет их округления.

5.30. Квантование коэффициентов при построении КИХ-фильтров в прямой форме

Частотную характеристику КИХ-фильтра с линейной фазовой характеристикой можно представить в виде

$$H(e^{j\omega}) = \left\{ \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] + h \left(\frac{N-1}{2} \right) \right\} e^{-j\omega(N-1)/2}, \quad (5.111)$$

где $\{h(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$, — импульсная характеристика фильтра, причем $h(n) = h(N-1-n)$. В выражении (5.111) множитель $e^{-j\omega(N-1)/2}$ учитывает только задержку на целое число отсчетов (N нечетное) и не изменяется при квантовании коэффициентов фильтра. Поэтому при анализе эффектов квантования коэффициентов достаточно рассмотреть функцию $\bar{H}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})e^{j\omega(N-1)/2}$.

Пусть $\{h^*(n)\}$ — последовательность, образующаяся в результате округления $\{h(n)\}$ при условии, что шаг квантования равен Q . Тогда $h^*(n) = h(n) + e(n)$ и $h^*(n) = h^*(N-1-n)$ для $0 \leq n \leq (N-1)/2$, причем $e(n)$ является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-Q/2, Q/2]$. Допустим, что $H^*(z)$ — z -преобразование от $\{h^*(n)\}$, а $\bar{H}^*(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})e^{j\omega(N-1)/2}$. Введем также функцию ошибки

$$E_L(e^{j\omega}) = \bar{H}^*(e^{j\omega}) - \bar{H}(e^{j\omega}) \quad (5.112)$$

или

$$E_L(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2e(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] + e \left(\frac{N-1}{2} \right). \quad (5.113)$$

Из формулы (5.113) видно, что функцию ошибки $E_L(e^{j\omega})$ можно рассматривать как частотную характеристику фильтра с линейной фазовой характеристикой, у которого первая половина импульсной характеристики образована последовательностью $\{e(n)\}$, а вторая имеет вид $e(N-1-n) = e(n)$, $0 \leq n \leq (N-1)/2$. Как было показано выше, фильтр с квантованными коэффициентами эквивалентен двум параллельно соединенным фильтрам, один из которых является исходным фильтром с неквантованными коэффициентами, а второй имеет частотную характеристику $E_L(e^{j\omega})e^{-j\omega(N-1)/2}$.

Учитывая, что $|e(n)| \leq Q/2$, легко найти границу для $|E_L(e^{j\omega})|$. Из равенства (5.113) следует, что

$$|E_L(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2|e(n)| \left| \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \right| + \left| e \left(\frac{N-1}{2} \right) \right| \leq \frac{Q}{2} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} |\cos(n\omega)| \right], \quad (5.114)$$

или

$$|E_L(e^{j\omega})| \leq \frac{NQ}{2}. \quad (5.115)$$

Эта граница является слишком грубой и на практике почти не используется. Если предположить, что ошибки, возникающие при квантовании отдельных коэффициентов, статистически независимы, то можно найти более приемлемую статистическую границу. Хотя для каждого конкретного фильтра коэффициенты квантуются один раз, после чего характеристика фильтра становится фиксированной, нижеприведенная граница дает возможность проектировщику оценить точность представления коэффициентов, необходимую для получения заданной характеристики фильтра, даже не зная заранее значений самих коэффициентов.

Исходя из формулы (5.113), выражение для $\overline{E_L^2}(e^{j\omega})$ можно записать в виде

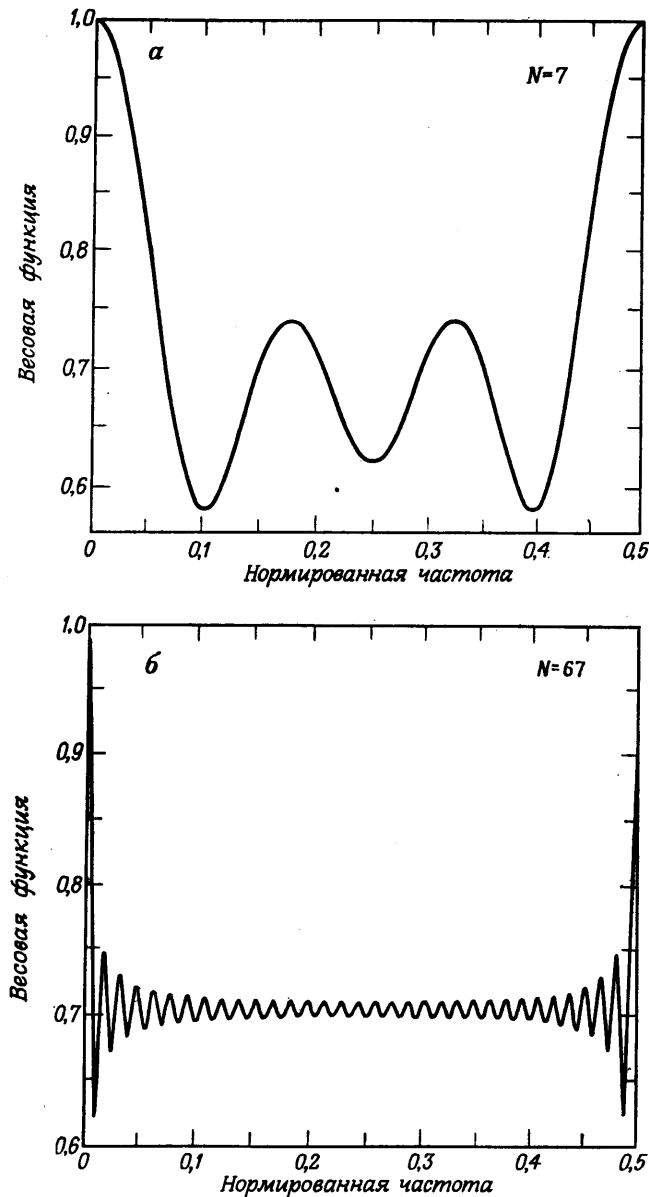
$$\overline{E_L^2}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 4\overline{e^2(n)} \cos^2 \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] + \overline{e^2 \left(\frac{N-1}{2} \right)}. \quad (5.116)$$

При равномерном распределении $e^2(n) = Q^2/12$, поэтому

$$\overline{E_L^2}(e^{j\omega}) = \frac{Q^2}{12} \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \cos^2(n\omega) \right]. \quad (5.117)$$

Введем следующую весовую функцию:

$$W_N(\omega) = \left\{ \frac{1}{2N-1} \left[1 + 4 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \cos^2(n\omega) \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.118)$$



Фиг. 5.40. Влияние квантования коэффициентов на частотную характеристику фильтра.

Тогда стандартное отклонение ошибки будет равно

$$\sigma_{EL}(\omega) = [E_L^2(e^{j\omega})]^{1/2} = \sqrt{\frac{2N-1}{3}} \frac{Q}{2} W_N(\omega). \quad (5.119)$$

Ясно, что $W_N(0) = W_N(\pi) = 1$ и $0 \leq W_N(\omega) \leq 1$ при всех N . Поэтому

$$\sigma_{EL}(\omega) \leq \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{2N-1}{3}}. \quad (5.120)$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 < \omega < \pi. \quad (5.121)$$

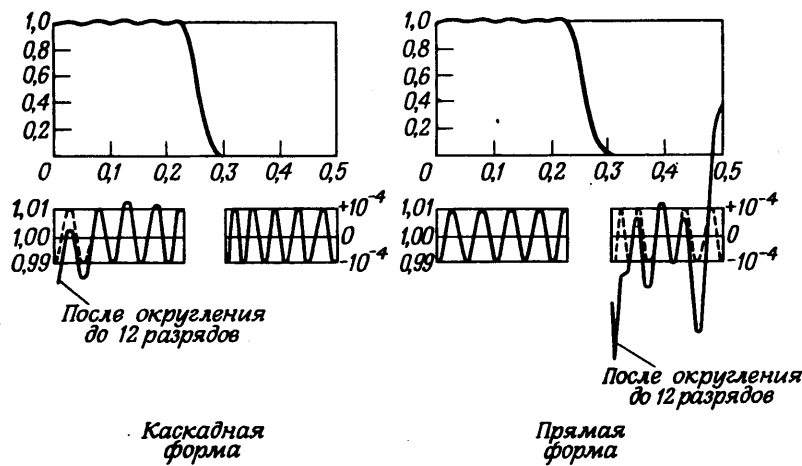
Из фиг. 5.40, где изображены весовые функции $W_N(2\pi f)$ для $N = 7$ и $N = 67$, видно, насколько $\sigma_{EL}(\omega)$ близко к границе, задаваемой формулой (5.120); при любых ω величина $\sigma_{EL}(\omega)$ отличается от этой границы не более чем в два раза.

Поскольку при любых ω ошибка $E_L(e^{j\omega})$ равна сумме независимых случайных величин, плотность распределения вероятностей которых равна нулю вне некоторого конечного интервала, то $E_L(e^{j\omega})$ при больших N является гауссовой случайной величиной. Таким образом, среднее значение и дисперсия ошибки $E_L(e^{j\omega})$ полностью определяют ее статистические свойства.

Чан и Рабинер экспериментально подтвердили справедливость вышеприведенной модели квантования коэффициентов для случая оптимальных фильтров нижних частот. Опираясь на эту модель и теоретические соотношения между параметрами фильтра с неквантованными коэффициентами, Чан и Рабинер сформулировали правило нахождения числа разрядов при расчете фильтра с заданными граничными частотами и уровнем пульсаций в полосах пропускания и непропускания.

5.31. Квантование коэффициентов при построении КИХ-фильтров в каскадной форме

Если КИХ-фильтр с линейной фазовой характеристикой строится в каскадной форме и его коэффициенты квантуются, то для сохранения линейности фазовой характеристики этот фильтр обычно приходится составлять из блоков четвертого порядка. Для такого фильтра несложно определить чувствительность положения нулей и формы частотной характеристики к изменению коэффициентов, однако общих статистических границ (подобных найденным в разд. 5.29 для прямой формы фильтров), которые описывали бы свойства каскадной формы, пока не найдено. Эксперименты показывают, что полосовые фильтры, выполненные в каскадной форме, весьма чувствительны к изменениям коэффициентов вблизи точки $z = 1$ и почти нечувствительны к ним вблизи $z = 0$. Поэтому



Фиг. 5.41. Сопоставление частотных характеристик фильтров прямой и каскадной форм с квантованными и неквантованными коэффициентами (по Херману и Шусслеру).

фильтры нижних частот каскадной формы весьма чувствительны к погрешностям коэффициентов в полосе пропускания, но слабо чувствительны к ним в полосе непропускания. На фиг. 5.41 в качестве примера приведены полученные Херманом и Шусслером частотные характеристики КИХ-фильтров нижних частот с линейной фазовой характеристикой, реализованных в каскадной и прямой форме с коэффициентами, округленными до 12 разрядов. Там же представлены характеристики фильтров с неквантованными коэффициентами. Для каскадной формы в начале полосы пропускания обе характеристики существенно различаются; однако в полосе непропускания они практически совпадают.

Поскольку общие статистические границы для ошибок частотных характеристик каскадных фильтров не известны, для минимизации максимума взвешенной ошибки частотной характеристики было использовано несколько машинных программ оптимизации коэффициентов.

5.32. Колебания предельного цикла

При анализе шума округления в цифровых фильтрах предполагалось, что разность между соседними отсчетами входного сигнала велика по сравнению с шагом квантования. Это позволяло считать, что отсчеты шума округления некоррелированы как друг с другом, так и с отсчетами входной последовательности. Ясно, что во многих случаях (например, если входной сигнал постоянен

или равен нулю) такое предположение несправедливо. Рассмотрим в качестве примера разностное уравнение

$$y(n) = 0,95y(n-1) + x(n) \quad (5.122)$$

и предположим, что входная последовательность $x(n) = 0$ (т. е. вход фильтра отключен), а начальное условие имеет вид $y(-1) = 13$. (Значения переменной y выражаются в единицах шага квантования Q и поэтому не могут быть дробными.) В приводимой ниже таблице сопоставляются точные значения $y(n)$, рассчитанные, согласно уравнению (5.122), без использования округления, а также значения, получающиеся при расчетах с округлением.

n	$y(n)$ точные	$y(n)$ с округлением
-1	13,0	13
0	12,35	12
1	11,7325	11
2	11,145875	10
3	10,58858125	10
4	10,05915219	10

Хотя точные значения $y(n)$ экспоненциально стремятся к нулю, при использовании округления значения $y(n)$ «затягиваются» на уровне, равном 10, и дальше уже не могут измениться. Рассмотренный пример иллюстрирует возникновение в рекурсивном цифровом фильтре эффекта предельного цикла при нулевом входном сигнале. Амплитудные интервалы, в которых возникают эффекты предельного цикла, Блэкман назвал мертвыми зонами. В рассмотренном примере при любом $|y(-1)| \leq 10$ будет получаться, что $y(n) = y(-1)$, $n \geq 0$, если $x(n) = 0$. Таким образом, интервал $[-10, 10]$ является мертвой зоной.

Джексон исследовал предельные циклы в системах первого и второго порядка, используя понятие «эффективных значений» коэффициентов фильтра, т. е. учитывая, что предельные циклы возникают только тогда, когда округление фактически приводит к появлению полюсов на единичной окружности. Так, для системы, описываемой разностным уравнением первого порядка

$$y(n) = x(n) - [\alpha y(n-1)]', \quad (5.123)$$

где символ $[\]'$ обозначает операцию округления до ближайшего целого, а $x(n) = 0$ при $n \geq 0$, мертвой зоной, в которой могут существовать предельные циклы, является интервал $[-k, k]$, при-

чем k равно наибольшему целому числу, удовлетворяющему неравенству

$$k \leq \frac{0,5}{1-|\alpha|}. \quad (5.124)$$

Из приведенного примера следует, что при отрицательных α отсчеты на выходе фильтра в режиме предельного цикла имеют постоянные амплитуду и знак. Если же $\alpha > 0$, то отсчеты на выходе в режиме предельного цикла будут иметь постоянную амплитуду, но чередующийся знак. При всех значениях $y(n)$ в пределах мертвой зоны эффективное значение множителя α равно ± 1 , т. е. $[\alpha y(n-1)]' = \pm y(n-1)$. Таким образом, разностному уравнению (5.123) соответствует эффективный полюс в точке $z = \pm 1$.

Для системы второго порядка, описываемой разностным уравнением

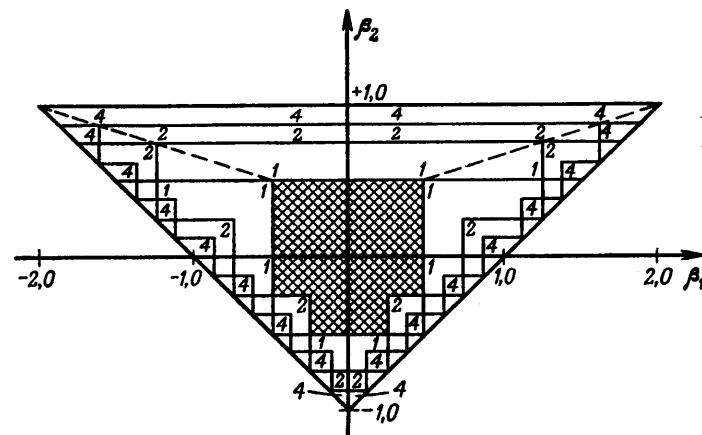
$$y(n) = x(n) - [\beta_1 y(n-1)]' - [\beta_2 y(n-2)]', \quad (5.125)$$

мертвой зоной, в которой могут возникать эффекты предельного цикла, является интервал $[-k, k]$, где k — наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$k \leq \frac{0,5}{1-\beta_2}, \quad 0 < \beta_2 < 1. \quad (5.126)$$

Формула (5.126) аналогична формуле (5.124), но α заменено на β_2 . При выполнении соотношения (5.126) полюсы фильтра наверняка попадают на единичную окружность, т. е. эффективное значение β_2 равно 1,0. (Отметим, что при $\beta_2 > 0$ полюсы будут комплексно сопряженными, а фильтр — устойчивым.) Частота колебаний в режиме предельного цикла определяется главным образом значением β_1 , но зависит также и от того, как округление сказывается на величине произведения $\beta_1 y(n-1)$ в формуле (5.125).

Из формулы (5.126) следует, что наименьшее значение β_2 , при котором еще образуется пара эффективных комплексно сопряженных полюсов равно 0,5. В этом случае $k \triangleq 1$. Следующее значение β_2 , для которого эффекты предельного цикла возникают при большем значении k , равно 0,75. В этом случае $k = 1$ или 2. При любом значении β_2 существует только конечное число интервалов значений β_1 , при которых могут возникать различные эффекты предельного цикла. Соответствующие области в плоскости (β_1, β_2) для блока второго порядка, описываемого уравнением (5.125), показаны на фиг. 5.42. Область, в которой предельные циклы не возникают, отмечена штриховкой. Горизонтальные линии соответствуют минимальным значениям β_2 , при которых происходит изменение режима в мертвой зоне. Числа внутри каждой из областей обозначают максимальное значение амплитуды колебаний в режи-



Фиг. 5.42. Зависимость амплитуды колебаний предельного цикла от коэффициентов фильтра (по Джексону).

ме предельного цикла, возможных в этой области плоскости (β_1, β_2) . Предельные циклы, возникающие при $\beta_2 < 0,5$, будут рассмотрены ниже.

Выше были проанализированы эффекты предельного цикла в блоках второго порядка, соответствующие возникновению пары эффективных комплексно сопряженных полюсов. Предельные циклы в таких блоках могут существовать и при появлении действительного эффективного полюса в точке $z = \pm 1$. В этом случае условием возникновения режима предельного цикла с выходной амплитудой, равной k , является следующее равенство:

$$[\beta_2 k]' \pm [\beta_1 k]' = k. \quad (5.127)$$

Для различных значений k нетрудно определить положение областей в плоскости (β_1, β_2) , внутри которых выполняется условие (5.127). Эти области показаны на фиг. 5.42.

Изучение предельных циклов важно по двум причинам. В системах связи отключение сигнала может вызвать эффекты предельного цикла. Это весьма нежелательно, поскольку хотелось бы, чтобы при отсутствии входного сигнала на выходе канала ничего не было слышно. Поэтому при использовании цифровых фильтров в системах телефонии данной проблеме следует уделить достаточно серьезное внимание. Вторая причина заключается в том, что предельные циклы можно использовать для генерации периодических последовательностей. Колебания предельного цикла с нужными характеристиками можно использовать при цифровой обработке в качестве источника сигнала.

После выхода в свет работы Джексона, посвященной предельным циклам, уточнению границ для амплитуд и частот колебаний предельного цикла уделялось очень много внимания. Подробности можно найти в соответствующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

Литература общего характера

1. Oppenheim A. V., Weinstein C. W., Effects of Finite Register Length in Digital Filters and the Fast Fourier Transform, *Proc. IEEE*, 60, No. 8, 957—976 (Aug. 1972); есть русский перевод: Оппенгейм, Вайнштейн, Влияние конечной длины регистра при цифровой фильтрации и быстром преобразовании Фурье, *ТИИЭР*, т. 60, № 8, стр. 41—65 (1972).
2. Gold B., Rader C. M., Digital Processing of Signals, Ch. 4, McGraw-Hill, 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
3. Liu B., Effect of Finite Word Length on the Accuracy of Digital Filters — A Review, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 670—677 (Nov. 1971).
4. Bennett W. R., Spectra of Quantized Signals, *Bell Syst. Tech. J.*, 27, 446—472 (July 1948).
5. Rader C. M., Gold B., Effects of Parameter Quantization on the Poles of a Digital Filter, *Proc. IEEE*, 55, No. 5, 688—689 (May 1967); есть русский перевод: Рейдер, Голд, Влияние квантования параметров на полюсы цифрового фильтра, *ТИИЭР*, 55, № 55, стр. 98—100 (1967).

Шум округления в рекурсивных структурах.

Случай фиксированной запятой

1. Knowles J. B., Edwards R., Effects of a Finite-Word-Length Computer in a Sampled-Data Feedback System, *Proc. Inst. Elec. Eng.*, 112, 1197—1207 (June 1965).
2. Gold B., Rader C. M., Effects of Quantization Noise in Digital Filters, *Proc. AFIPS 1966 Spring Joint Computer Conf.*, 28, 213—219 (1966).
3. Jackson L. B., On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 49, 159—184 (Feb. 1970).
4. Jackson L. B., Roundoff Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-18, 107—122 (June 1970).

Шум округления в нерекурсивных структурах.

Случай фиксированной запятой

1. Chan D. S. K., Rabiner L. R., Theory of Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 52, No. 3, 329—345 (March 1973).
2. Chan D. S. K., Rabiner L. R., An Algorithm for Minimizing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 52, No. 3, 347—385 (March 1973).
3. Chan D. S. K., Rabiner L. R., Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 4, 354—366 (Aug. 1973).

Шум округления в рекурсивных структурах.

Случай плавающей запятой

1. Sandberg I. W., Floating-Point Roundoff Accumulation in Digital Filter Realization, *Bell Syst. Tech. J.*, 46, 1775—1791 (Oct. 1967).

2. Kaneko T., Liu B., Roundoff Error of Floating-Point Digital Filters, *Proc. 6th Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 219—227 (Oct. 1968).
3. Weinstein C., Oppenheim A. Y., A Comparison of Roundoff Noise in Floating Point and Fixed Point Digital Filter Realizations, *Proc. IEEE (Corresp.)*, 57, 1181—1183 (June 1969); есть русский перевод: Вайнштейн, Оппенгейм, Сравнение шумов округления цифровых фильтров при их реализации по методу с плавающей запятой и по методу с фиксированной запятой, *ТИИЭР*, т. 57, № 7, стр. 72—74 (1969).
4. Liu B., Kaneko T., Error Analysis of Digital Filters with Floating-Point Arithmetic, *Proc. IEEE*, 57, 1735—1747 (Oct. 1969); есть русский перевод: Лиу, Канеко, Анализ погрешностей цифровых фильтров, реализуемых арифметическими операциями с плавающей запятой, *ТИИЭР*, т. 57, № 10, стр. 49—63 (1969).
5. Oppenheim A. V., Realization of Digital Filters Using Block Floating-Point Arithmetic, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-18, 130—136 (June 1970).

Колебания переполнения

1. Ebert P. M., Mazo J. E., Taylor M. G., Overflow Oscillations in Digital Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 48, 3021—3030 (Nov. 1968).

Квантование коэффициентов в рекурсивных структурах

1. Kaiser J. F., Some Practical Considerations in the Realization of Linear Digital Filters, *Proc. 3rd Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 621—633 (1965).
2. Rader C. M., Gold B., Effects of Parameter Quantization on the Poles of a Digital Filter, *Proc. IEEE (Corresp.)*, 55, 688—689 (May 1967).
3. Knowles J. B., Olcayto E. M., Coefficient Accuracy and Digital Filter Response, *IEEE Trans. Circuit Theory*, 15, No. 1, 31—41 (March 1968).
4. Avenhaus E., Schuessler H. W., On the Approximation Problem in the Design of Digital Filters with Limited Wordlength, *Arch. Elek. Ubertragung*, 24, 571—572 (1970).

Квантование коэффициентов в нерекурсивных структурах

1. Hermann O., Schuessler H. W., On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters, *Arch. Elek. Ubertragung*, 24, 525—526 (1970).
2. Chan D. S. K., Rabiner L. R., Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 4, 354—366 (Aug. 1973).
3. Weinstein C. W., Quantization Effects in Frequency Sampling Filters, *NEREM Record*, 22 (1968).

Предельные циклы в рекурсивных структурах

1. Blackman R. B., Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., pp. 75—79 (1965).
2. Jackson L. B., An Analysis of Limit Cycles Due to Multiplication Rounding in Recursive Digital (Sub) Filters, *Proc. 7th Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 69—78 (1969).
3. Parker S. R., Hess S. F., Limit-Cycle Oscillations in Digital Filters, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 687—696 (Nov. 1971).
4. Sandberg I. W., A Theory Concerning Limit Cycles in Digital Filters, *Proc. 7th Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 63—67 (1969).
5. Brubaker T. A., Gowdy J. N., Limit Cycles in Digital Filters, *IEEE Trans. Automatic Control*, 17, No. 5, 675—677 (Oct. 1972).
6. Sandberg I. W., Kaiser J. F., A Bound on Limit Cycles in Fixed-Point Implementations of Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 2, 110—112 (June 1972).