

Фиг. 7.9. Амплитудные характеристики неустойчивого фильтра (—) и его устойчивой аппроксимации (---), полученной методом двойного обращения (по Шенксу).

будет минимальна. Теперь найдем многочлен  $\hat{B}(z_1, z_2)$ , аппроксимирующий функцию  $1/C(z_1, z_2)$  с минимальной среднеквадратической ошибкой. Согласно Шенксу, фильтр с передаточной функцией

$$\hat{H}(z_1, z_2) = \frac{1}{\hat{B}(z_1, z_2)} \quad (7.55)$$

является устойчивым, причем его амплитудная характеристика приблизительно совпадает с характеристикой исходного фильтра. На фиг. 7.9 в качестве примера изображены полученные Шенксом амплитудные характеристики неустойчивого фильтра и фильтра, «стабилизированного» методом двойного обращения с использованием критерия минимума среднеквадратической ошибки. Контуры постоянного уровня амплитудных характеристик  $B$  и  $\hat{B}$ , показанные на рисунке, отличаются весьма незначительно друг от друга.

#### 7.14. КИХ-фильтры

Для двумерных КИХ-фильтров проблемы устойчивости не существует, так как их импульсные характеристики ограничены и по амплитуде, и по длительности, так что при любых конечных  $N_1$  и  $N_2$  условие устойчивости

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} |h(n_1, n_2)| < \infty \quad (7.56)$$

всегда выполняется. (Импульсные характеристики КИХ-фильтров отличны от нуля в прямоугольнике  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ,  $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ .) Из неравенства (7.56) следует, что многие методы проектирования одномерных фильтров часто можно обобщить на

двумерный случай, внося в них соответствующие изменения. В последующих разделах данной главы будут описаны (и проиллюстрированы примерами) метод взвешивания, метод частотной выборки и метод расчета оптимального фильтра.

Будем считать, что частотные характеристики фильтров имеют круговую симметрию, т. е.

$$H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) \approx \hat{H}(e^{j2\pi \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}). \quad (7.57)$$

Такие фильтры находят применение во многих практических задачах, например при обработке изображений, когда обе пространственные частоты равноценны. Легко показать, что, располагая отсчеты импульсной характеристики в виде прямоугольной сетки, добиться точной круговой симметрии невозможно. Причина заключается в периодичности  $H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  по двум осям, т. е.

$$H[e^{j2\pi(f_1+m_1)}, e^{j2\pi(f_2+m_2)}] = H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) \quad (7.58)$$

( $m_1$  и  $m_2$  — произвольные целые числа), что противоречит условию (7.57). На практике, однако, удается получить достаточно хорошее приближение к условию круговой симметрии (7.57).

#### 7.15. Двумерные весовые функции (окна)

Метод весовых функций распространяется на двумерный случай непосредственно. Заданная частотная характеристика  $D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  (обычно при определенных ограничениях можно считать, что она обладает круговой симметрией) разлагается в двумерный ряд Фурье

$$D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) e^{-j2\pi n_1 f_1} e^{-j2\pi n_2 f_2}, \quad (7.59)$$

в результате чего невзвешенная импульсная характеристика  $h(n_1, n_2)$  определяется следующим образом:

$$h(n_1, n_2) = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) e^{j2\pi n_1 f_1} e^{j2\pi n_2 f_2} df_1 df_2. \quad (7.60)$$

Чтобы сделать пределы суммирования в разложении (7.59) конечными и вместе с тем улучшить сходимость усеченного ряда в точках разрыва характеристики  $D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$ , умножим коэффициенты ряда Фурье на весовую последовательность  $w(n_1, n_2)$  конечной длины. При этом аппроксимация частотной характерис-

тики  $D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{D}(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) &= \\ &= \sum_{n_1=-[(N_1-1)/2]}^{[(N_1-1)/2]} \sum_{n_2=-[(N_2-1)/2]}^{[(N_2-1)/2]} \hat{h}(n_1, n_2) e^{-j2\pi n_1 f_1} e^{-j2\pi n_2 f_2}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

где

$$\hat{h}(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) w(n_1, n_2). \quad (7.62)$$

Нетрудно показать, что характеристики  $\hat{D}(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  и  $D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  связаны соотношением

$$\hat{D}(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) = D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) * W(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}), \quad (7.63)$$

где знак  $*$  обозначает круговую свертку, а

$$\begin{aligned} W(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) &= \\ &= \sum_{n_1=-[(N_1-1)/2]}^{[(N_1-1)/2]} \sum_{n_2=-[(N_2-1)/2]}^{[(N_2-1)/2]} w(n_1, n_2) e^{-j2\pi n_1 f_1} e^{-j2\pi n_2 f_2}, \end{aligned} \quad (7.64)$$

т. е.  $W(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  является преобразованием Фурье от весовой последовательности  $w(n_1, n_2)$ . Соотношение (7.63) показывает, что частотная характеристика фильтра равна свертке заданной частотной характеристики с преобразованием Фурье от весовой последовательности.

Расчет фильтра методом весовых функций сводится к выбору такой весовой функции  $w(n_1, n_2)$ , чтобы ее преобразование Фурье  $W(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  обладало следующими свойствами:

1. Оно должно быть близко к функции с круговой симметрией.
2. Объем под главным лепестком должен быть большим.
3. Объем под боковыми лепестками должен быть небольшим.

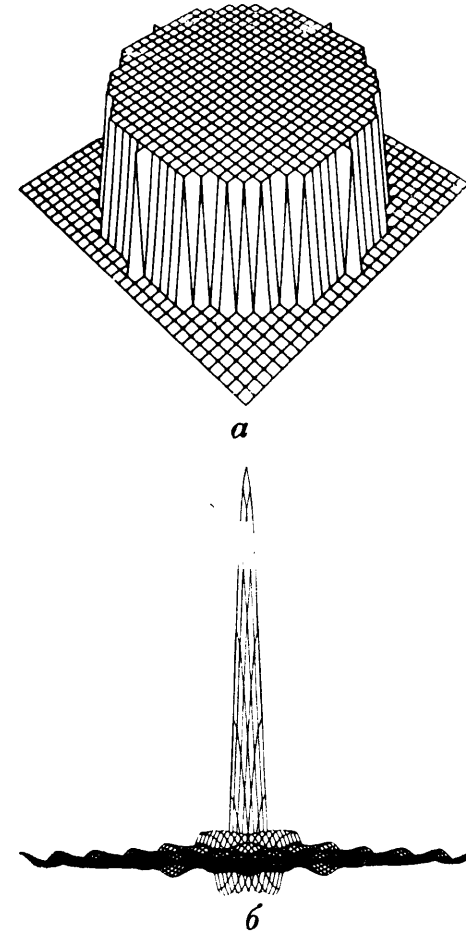
Хуанг показал, что достаточно хорошие двумерные весовые функции, удовлетворяющие перечисленным условиям, можно сформировать из соответствующих одномерных весовых функций с помощью формулы

$$w(n_1, n_2) = \hat{w}(\sqrt{n_1^2 + n_2^2}). \quad (7.65)$$

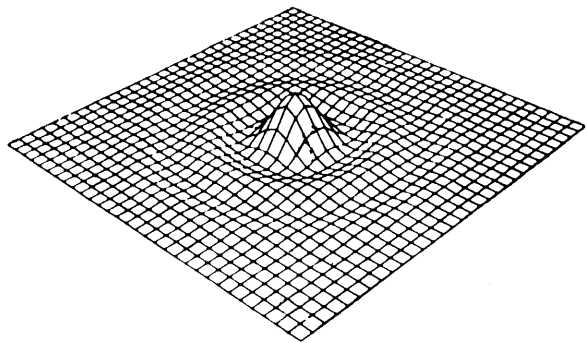
Здесь  $\hat{w}$  — подходящее одномерное (непрерывное) окно, дискретизированное в соответствующих точках. Таким образом, с помощью формулы (7.65) можно найти двумерные аппроксимации прямоугольного окна, окон Хэмминга, Кайзера и др., обладающие круговой симметрией.

### 7.16. Пример расчета фильтра нижних частот методом взвешивания

В данном разделе будет приведен простой пример расчета фильтра нижних частот с круговой симметрией и использованием прямоугольного окна и окна Кайзера с параметром  $\beta = 5$  (этот параметр был введен в разд. 3.11).



Фиг. 7.10. Двумерное прямоугольное окно с круговой симметрией и его амплитудный спектр.



Фиг. 7.11. Произведение прямоугольного окна с круговой симметрией на импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот.

Рассмотрим частотную характеристику фильтра нижних частот с круговой симметрией, имеющую вид

$$D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) = \begin{cases} 1,0 & \text{при } \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq 0,4, \\ 0,0 & \text{при других } f_1, f_2. \end{cases} \quad (7.66)$$

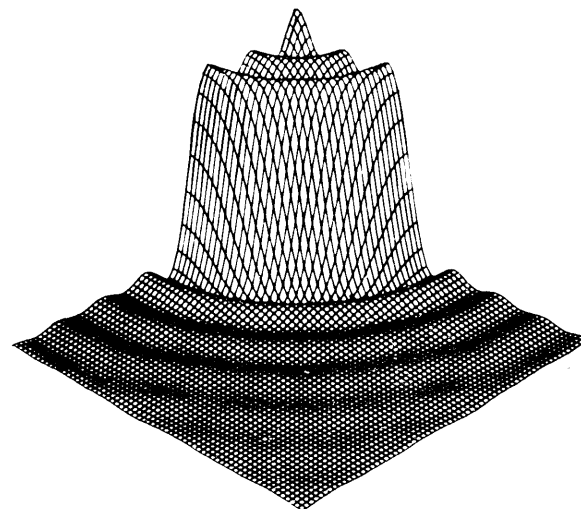
Используя формулу (7.60), получим

$$h(n_1, n_2) = \frac{0,8\pi J_1(0,8\pi \sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, \quad -\infty \leq n_1 \leq \infty, \\ -\infty \leq n_2 \leq \infty, \quad (7.67)$$

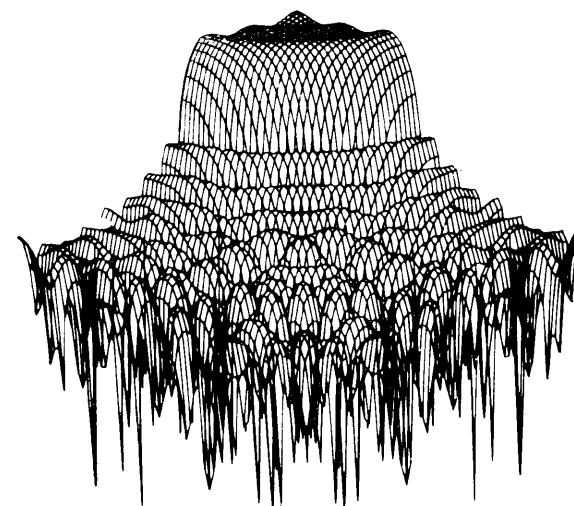
что согласуется с результатами примера 3, приведенного в разд. 7.6. [Здесь  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого порядка.] Для усечения ряда Фурье применим двумерное прямоугольное окно, т. е. последовательность, задаваемую соотношением

$$w(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \leq 14, \\ 0 & \text{при } \sqrt{n_1^2 + n_2^2} > 14. \end{cases} \quad (7.68)$$

Пространственное изображение этого окна представлено на фиг. 7.10, а, а его фурье-преобразование  $W(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$  — на фиг. 7.10, б, где хорошо видны большие выбросы. На фиг. 7.11 представлено произведение  $h(n_1, n_2) \cdot w(n_1, n_2)$ , используемое в качестве импульсной характеристики двумерного фильтра. На фиг. 7.12, а и б представлена частотная характеристика этого фильтра в линейном и логарифмическом масштабе, причем вблизи области, где идеальная характеристика (7.66) имеет разрыв, ясно видны большие выбросы и пульсации.

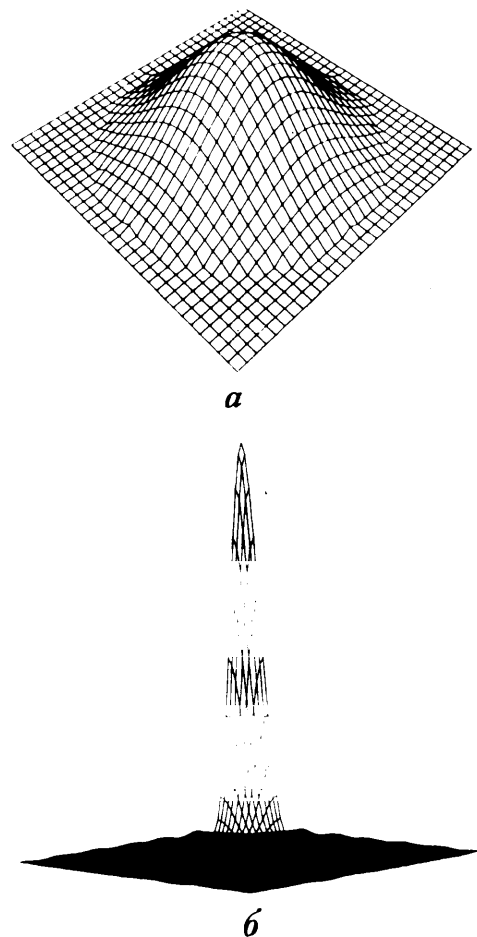


а



б

Фиг. 7.12. Амплитудная характеристика двумерного фильтра нижних частот, рассчитанного с использованием прямоугольного окна, в линейном и логарифмическом масштабе.

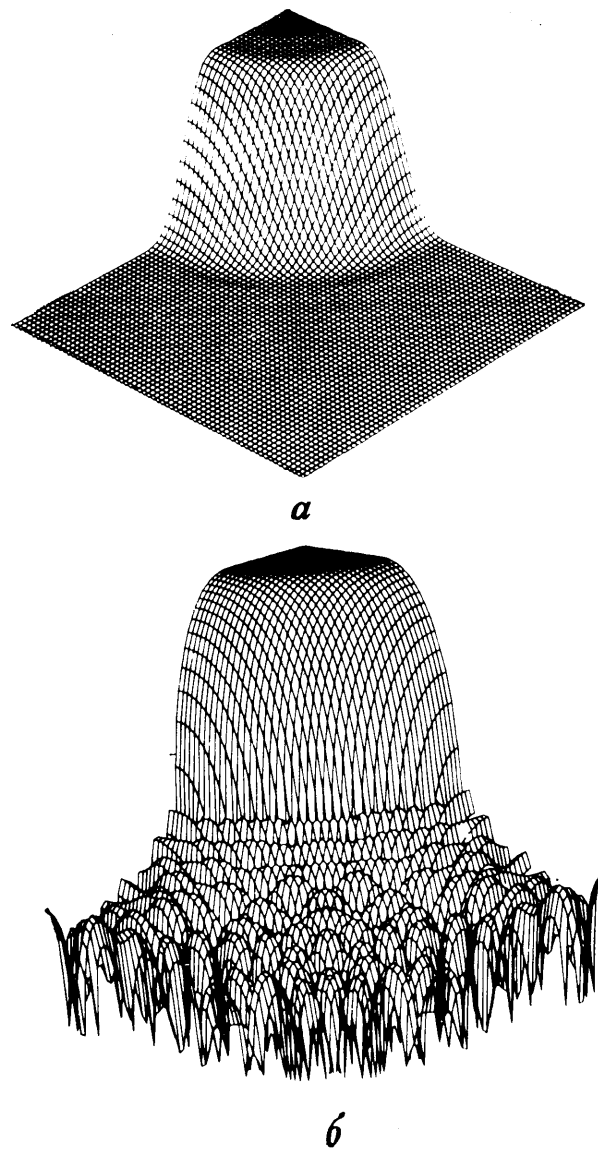


Фиг. 7.13. Двумерное окно Кайзера и его амплитудный спектр.

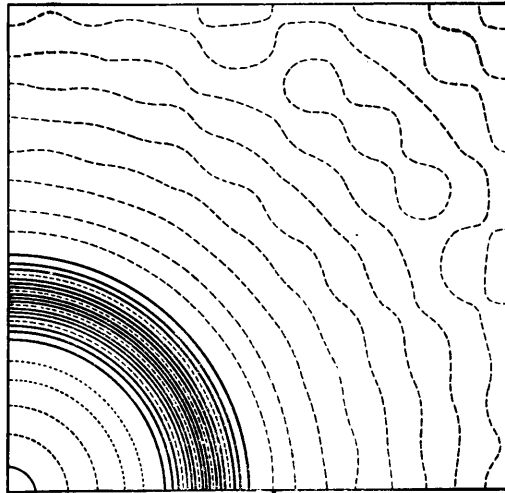
Применяя более удачные весовые функции, можно значительно снизить уровень выбросов и пульсаций в амплитудной характеристике фильтра. Это видно из фиг. 7.13—7.15, где использовано двумерное окно Кайзера, определяемое формулой

$$w(n_1, n_2) = \frac{I_0[\beta \sqrt{1 - (\sqrt{n_1^2 + n_2^2}/14)}]}{I_0(\beta)}. \quad (7.69)$$

Здесь  $\beta = 5,0$ , а  $I_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка. Пространственное изображение окна приведено на фиг. 7.13, а, а соответствующая ему двумерная амплитудная характеристика —



Фиг. 7.14. Амплитудная характеристика фильтра нижних частот, рассчитанного с использованием окна Кайзера, в линейном и логарифмическом масштабе.



Фиг. 7.15. Контуры равных уровней фильтра нижних частот, рассчитанного с использованием окна Кайзера.

на фиг. 7.13, б. Видно, что по сравнению с прямоугольным окном объем под боковыми лепестками стал значительно меньше. На фиг. 7.14, а, б приведена в линейном и логарифмическом масштабе амплитудная характеристика фильтра нижних частот, рассчитанного с использованием окна Кайзера, а на фиг. 7.15 изображены контуры равных уровней этой характеристики в области  $0 \leq f_1 \leq 0,5$ ;  $0 \leq f_2 \leq 0,5$ . Видно, что форма амплитудной характеристики улучшается по сравнению со случаем прямоугольного окна (фиг. 7.12) весьма существенно, а характеристика с высокой степенью точности обладает круговой симметрией.

### 7.17. Фильтры с частотной выборкой

Расчет двумерных фильтров методом частотной выборки основан на приведенных выше формулах прямого и обратного двумерного ДПФ. Рассмотрим фильтр с импульсной характеристикой конечной длины  $h(n_1, n_2)$ , заданной в прямоугольнике  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ,  $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ ,  $z$ -преобразование которой равно

$$H(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}. \quad (7.70)$$

Вычисляя значения правой части (7.70) для дискретного набора частот

$$\omega_{k_1} = k_1 \left( \frac{2\pi}{N_1} \right), \quad k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad (7.71)$$

$$\omega_{k_2} = k_2 \left( \frac{2\pi}{N_2} \right), \quad k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \quad (7.72)$$

получим ДПФ импульсной характеристики фильтра

$$H(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1, n_2) \exp \left\{ -j2\pi \left( \frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} \right) \right\}. \quad (7.73)$$

Нетрудно найти и обратное ДПФ:

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) \exp \left\{ j2\pi \left( \frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Подставив выражение (7.74) в преобразование (7.70), получим следующую интерполяционную формулу для расчета частотной характеристики фильтра в произвольной точке:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) &= \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) \exp \left[ j2\pi \left( \frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} \right) \right] \right\} \exp \left[ -j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2) \right]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Изменив порядок суммирования и просуммировав по  $n_1$  и  $n_2$ , получим

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) A(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2), \quad (7.76)$$

где

$$\begin{aligned} A(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \left( \frac{1 - \exp(-jN_1 \omega_1)}{1 - \exp\{j[2\pi(k_1/N_1) - \omega_1]\}} \right) \times \\ &\times \left( \frac{1 - \exp(-jN_2 \omega_2)}{1 - \exp\{j[2\pi(k_2/N_2) - \omega_2]\}} \right). \end{aligned} \quad (7.77)$$

При расчете двумерных фильтров методом частотной выборки формула (7.76) является основной. Из этой формулы видно, что частотная характеристика фильтра, рассматриваемая как непрерывная функция частоты, представляет собой линейную комбинацию сдвинутых интерполирующих функций  $A(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2)$ , умноженных на коэффициенты ДПФ  $H(k_1, k_2)$ . Совокупность этих коэффициентов называют частотной выборкой, так как они дают