

Глава 1

Представление сигналов

Непрерывные или дискретные сигналы – это совокупность достаточно большого числа точек на графике или чисел в компьютере, которые сами по себе сигнал никак не характеризуют, особенно если сам сигнал скрыт в шумах. Некоторое представление о характере сигнала могут дать его энергия или мощность, но более полное – разложение (или его описание) по некоторым компонентам или простым колебаниям. Аналогом такого подхода является описание человека по его носу, губам, бровям и т.п. Здесь, конечно, имеет значение выбор самих компонент: при неудачном выборе их может потребоваться бесконечное множество, а при удачном – наоборот. Множество компонент образуют систему координат пространства сигналов, в котором каждый сигнал можно представить одной точкой. Это пространство может быть разбито на части – подпространства, в каждом из которых сигналы характеризуются некоторым общим свойством. Так, например, можно разделить все человечество на людей с прямыми носами или карими глазами и т.п.

Настоящая глава посвящена вопросам, связанным с представлением сигналов, которое является основой анализа сигнала.

1.1. Множества сигналов

Вся совокупность сигналов S , встречающихся как на практике, так и в теоретических исследованиях, может быть разбита на ряд групп или *множеств*, каждое из которых объединено каким-либо одним общим и единственным свойством P . Условно это записывается как: $V_P = \{s; P\}$, т.е. V_P есть множество всех s , для которых справедливо P . Следовательно, определив свойство P , мы определяем тем самым множество сигналов.

Множества чаще всего обозначаются заглавными буквами, например, S, V, F, G, L и т.д. Каждый сигнал (или другой объект) множества называется его элементом и обозначаются прописными буквами: s, u, v, f, g и т.д.

Периодические сигналы – множество периодических сигналов с периодом T

$$V_p(T) = \{s; s(t + nT) = s(t), -\infty < t < \infty, n \in Z\} \quad (1.1)$$

Запись $n \in Z$ означает, что n может принимать любое целочисленное значение, т.е. $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$.

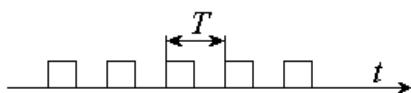


Рис. 1.1.
Периодические прямоугольные импульсы

Примером таких сигналов может служить последовательность импульсов, следующих друг за другом с определенным временным интервалом (периодом T) (см. рис. 1.1).

Сигналы с ограниченной энергией. Это, например, сигналы из множества

$$L_{2E} = \left\{ s; \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty \right\}. \quad (1.2.)$$

О функциях $s(t)$, описывающих такой сигнал, говорят, что они интегрируемы с квадратом.

Очевидно, что неравенство в (1.2) справедливо, только если $\lim_{|t| \rightarrow \infty} s(t) \rightarrow 0$.

Иногда говорят о сигналах с ограниченной энергией, заданных на конечном интервале $T = t_2 - t_1$ (см. (B.1)).

Тогда (1.2) можно записать в виде

$$L_{2E}(T) = \left\{ s; \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

Последнее множество сигналов можно рассматривать также как сигналы с ограниченной мощностью:

$$L_{2P}(T) = \left\{ s; \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

В дальнейшем для таких множеств будем пользоваться обозначением $L_2(T)$, опуская T при бесконечном интервале определения – L_2 .

К множеству сигналов $L_{2E}(T)$ или $L_{2P}(T)$ относятся, в частности, *финитные сигналы*.

Сигналы с ограниченной полосой. Спектр Фурье $S(f)$ таких сигналов ограничен некоторой предельной частотой W Гц, т.е.

$$V_B(W) = \{s; S(f) = 0\} \text{ для всех } |f| > W. \quad (1.3)$$

Именно для таких сигналов формулируется известная *теорема отсчетов*.

Сигналы ограниченной длительности. Это множество сигналов, которые равны нулю за пределами некоторого интервала $t_1 \leq t \leq t_2$, т.е.

$$V_t(T_0) = \{s; s(t) = 0, \text{ для } t_2 \leq t \leq t_1, T_0 = t_2 - t_1\}. \quad (1.4)$$

Комплексный гармонический сигнал – это множество сигналов

$$V_c = \left\{ s; s(t) = Ae^{j(2\pi f t + \theta)} \right\}, \quad (1.5)$$

где A, f, θ – амплитуда, частота и начальная фаза колебаний, $j = \sqrt{-1}$.

Остановимся на некоторых операциях над множествами, с которыми будем встречаться позже.

Объединение множеств V_1 и V_2 записывается как

$$V_1 \cup V_2 = \{s; s \in V_1 \text{ или } s \in V_2\}$$

и иллюстрируется на рис. 1.2.

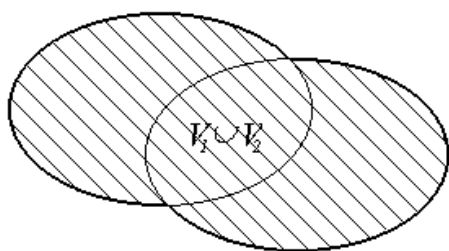


Рис. 1.2.

Объединение множеств V_1 и V_2

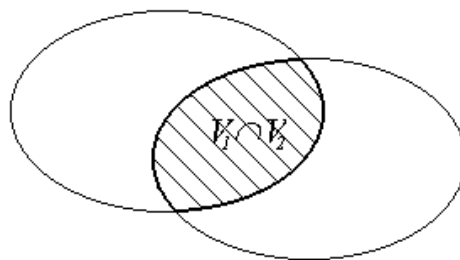


Рис. 1.3.

Пересечение множеств V_1 и V_2

Пересечение множеств V_1 и V_2 определяется как $V_1 \cap V_2 = \{s; s \in V_1 \text{ и } s \in V_2\}$ и иллюстрируется на рис. 1.3.

Запись $s \in V$ означает, что элемент s принадлежит множеству V ; запись $V_1 \subset V_2$ – каждый элемент множества V_1 входит в множество V_2 (иначе говоря, V_1 – *подмножество* V_2 см. рис. 1.4)

Примерами часто встречающихся множеств являются:

N – натуральные числа;

R – вещественные

(действительные) числа;

C – комплексные числа;

S – множество сигналов;

L – множество функций;

Z – целые числа.

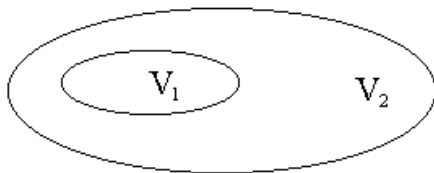
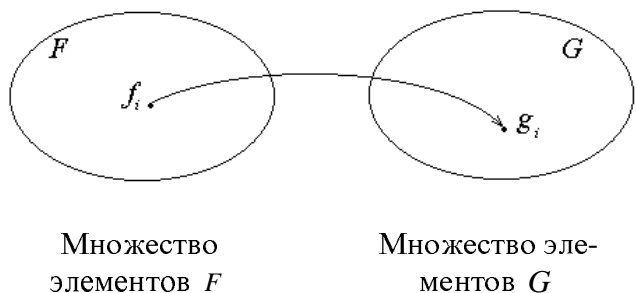


Рис. 1.4.

Множество V_1 является подмножеством множества V_2

Отображение множеств. Преобразование каждого элемента f_i одного множества F в элемент g_i другого множества G называется *отобра-*

жением, иногда – преобразованием (см. рис. 1.5) Элемент f_i называется



прообразом, а элемент g_i – образом. Если правило или закон преобразования обозначить Q , то преобразование F в G можно выразить формулой $f_i = Q[g_i]$.

Рис. 1.5.
Отображение множеств

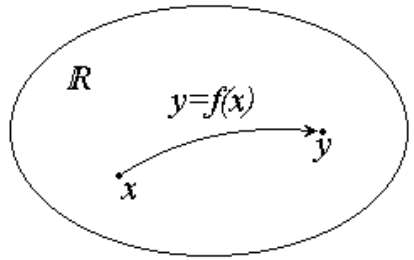
Преобразование будет линейным, если для некоторых вещественных чисел λ_1 и λ_2 выполняются условия аддитивности и однородности:

$$Q[\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2] = \lambda_1 Q[F_1] + \lambda_2 Q[F_2].$$

Приведем несколько примеров преобразований Q .

Пример 1.

Если F и G – числа, например x и y , принадлежащие одному множеству R , то преобразование Q порождает функциональную зависимость



$y = f(x)$ (рис. 1.6). Свойством линейности обладает линейная функция $y = \lambda_1 x + \lambda_2$.

Рис. 1.6.
Функциональная зависимость $y = f(x)$.
 R – множество чисел

Пример 2.

Если F и G – это функции из одного и того же множества L , например $f(t)$ и $g(t)$, то Q – это оператор преобразования функций $f(t)$ в $g(t)$

$$g(t) = Q[f(t)] \quad (\text{рис. 1.7}).$$

Свойством линейности здесь обладает оператор умножения на скаляр

$$f(t) = \lambda g(t)$$

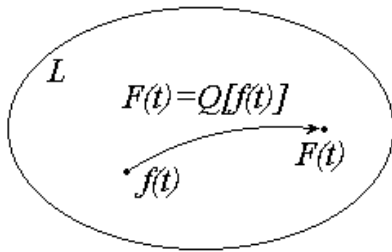
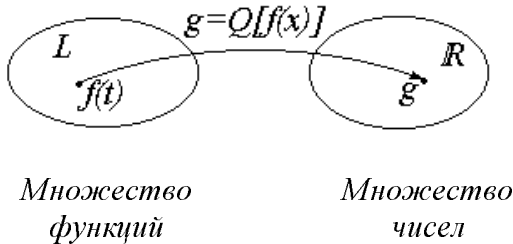


Рис. 1.7.
Оператор Q .
 L – множество функций

Пример 3.

Если множество F – это функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, а множество G – числа g , то преобразование Q – это функционал $g = Q[f(t)]$ (рис. 1.8).

Примером функционалов являются интегралы



Множество функций Множество чисел

Рис. 1.8.
Функционал Q

и оператор дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] &= \\ &= \lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t) \end{aligned}$$

и интегрирования

$$\begin{aligned} \int [\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] dt &= \\ &= \lambda_1 \int f_1(t) dt + \lambda_2 \int f_2(t) dt \end{aligned}$$

$$g_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt,$$

$$g_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\varphi(t)dt$$

(рис. 1.9).

Примером *линейных* функционалов является выражение для площади финитного сигнала

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt.$$

Если функции заданы на дискретном множестве точек t_i , то интегралы заменяются суммами.

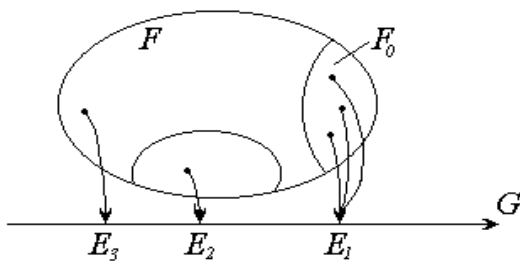


Рис. 1.9.
Отображение множества сигналов с конечной энергией F в действительные числа G ; F_0 – подмножество сигналов с энергией E_1

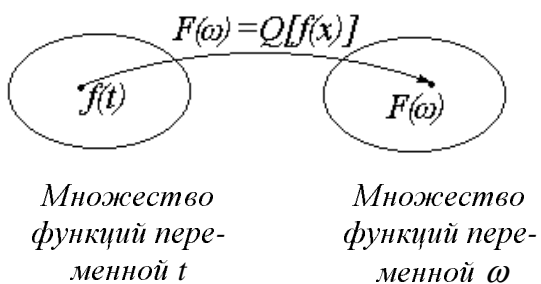


Рис. 1.10.
Функциональный оператор Q

Пример 4.

Если F – множество функций одной переменной, например ω , а G – множество функций другой переменной, например t , то преобразование Q – функциональный оператор (рис. 1.10)

$$F(\omega) = Q[f(t)]$$

Наиболее типичным примером функционального оператора является преобразование Фурье (рис. 1.11):

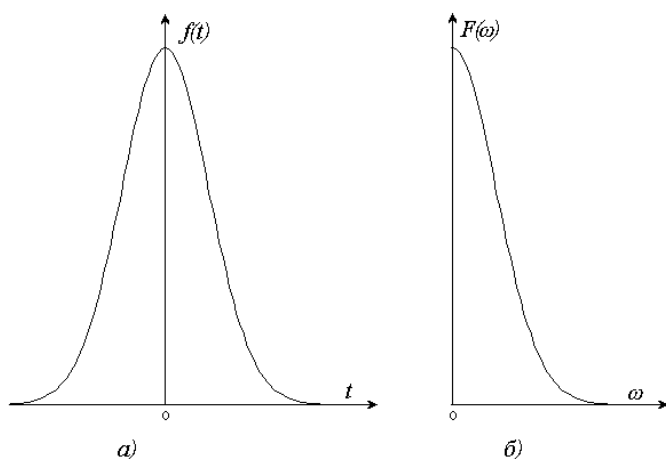


Рис. 1.11.
Преобразование Фурье:
а) $f(t)$ – функция времени;
б) $F(\omega)$ – спектр Фурье, функция частоты ω

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Еще одним примером является хорошо известная операция свертки (В.6) функции $f(t)$ с функцией $g(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Иногда рассматривают функциональный оператор как разновидность функционала

на том основании, что каждое числовое значение функции $F(\omega)$, при фиксированном ω , определяется поведением функции $f(t)$ на всем интервале изменения переменной t .

1.2. Пространство сигналов

Метрическое пространство. Рассматривая элементы, в сущности, сигналы одного и того же множества, необходимо условиться о признаках или признаке, отличающих их друг от друга. Общий и интуитивно ясный подход заключается в том, чтобы эти элементы интерпретировать в виде точек в некоторой системе координат. Оказывается, что наиболее подходящим признаком, отличающим два элемента множества, например x и y , является расстояние между этими точками (обозначим его через $d(x, y)$).

Множество с подходящим образом определенным расстоянием называется *пространством*. Если, кроме того, установлено правило, с помощью которого вычисляется это расстояние, то пространство называется *метрическим*, а само правило называется *метрикой*. Расстояние d обладает следующими аксиоматическими признаками:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$, только если $x = y$,
 - 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметрия),
 - 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника).
- (1.6)

Так как расстояние – это число, а элементы x и y могут быть функциями, то $d(x, y)$ – это функционал.

Пример 5.

Действительная ось – множество действительных чисел R – является метрическим пространством с метрикой

$$d(x, y) = |x - y|; \quad x, y \in R.$$

То есть расстояние между действительными числами является просто модулем их разности.

Линейные пространства. После ввода понятия метрики дальнейшим продуктивным подходом к конструированию пространства для представления сигналов является рассмотрение сигналов как векторов, соединяющих

начало координат с точкой (элементом) этого пространства. Тогда каждому элементу x, y, z, \dots пространства соответствует набор чисел (вещественных или комплексных) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ и т.д., являющихся проекцией вектора на координатные оси. Кроме того, используя операции векторной алгебры, могут быть определены различные взаимосвязи между элементами пространства. Поскольку эти операции линейны, то и пространство, образованное множеством векторов, является *линейным*. Более точно: множество элементов x, y, z, \dots образует линейное пространство, если в нем определены следующие операции:

1. Каждой паре векторов x и y множества V соответствует вектор $x + y \in V$, называемый суммой x и y ;

2. Каждому элементу $x \in V$ и каждому числу (скаляру) λ поставлен в соответствие определенный элемент $\lambda x \in V$ – произведение на скаляр так, что для любых элементов $x + y \in V$ и любых скаляров λ и μ

а) сложение коммутативно $x + y = y + x$;

б) сложение ассоциативно $x + (y + z) = (x + y) + z$;

в) существует нулевой элемент $0 \in V$ такой, что $x + 0 = x$;

г) для любого x существует единственный вектор $(-x)$ такой, что $x + (-x) = 0$;

д) умножение на скаляр ассоциативно $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

е) $1x = x$ и $0x = 0$ для любого x ;

ж) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
 з) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ } (законы дистрибутивности).

Приведенные выше свойства позволяют ввести достаточные ясные алгебраические взаимосвязи между сигналами.

Если в качестве скаляров $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ и т.д. берутся вещественные числа, то такое пространство называется *вещественным (действительным)*

линейным пространством. В противном случае, имеем дело с *комплексным* линейным пространством.

Нормированные линейные пространства. Расстояние от начала координат до какой-либо точки пространства называется *нормой*, а пространство, где она введена – *нормированным*. Норма вектора x , обозначаемая как $\|x\|$, должна удовлетворять следующим аксиомам:

- а) $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0$, только если $x = 0$;
 - б) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
 - в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – неравенство треугольника.
- (1.7)

Сопоставляя приведенные аксиомы с требованиями, которым должна удовлетворять метрика $d(x, y)$, легко видеть, что

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.8}$$

есть метрика, которая удовлетворяет условиям (1.6). Если такая метрика используется в *нормированном линейном пространстве*, то оно будет *метрическим*.

Пример 6.

Пусть R^n – множество, представляющее собой упорядоченный набор n вещественных чисел (вектор – строк из n чисел). Пусть $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ и $y = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, тогда следующие функционалы дают примеры метрик:

а) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$,

б) $d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^2 \right]^{1/2}$,

в) $d_3(x, y) = \max\{|\alpha_i - \beta_i|; i = 1, 2, \dots, n\}$.

Пространство со скалярным произведением. Взаимное отношение двух векторов, т.е. их геометрические свойства, может быть охарактеризовано с помощью числа, называемого *скалярным произведением*. Иными словами, это – отображение упорядоченных пар векторов линейного пространства на вещественную ось R или комплексную плоскость C . Скалярное произведение векторов x и y , обозначаемое как $\langle x, y \rangle$, часто называют *внутренним произведением*.

Линейное вещественное пространство, в котором введено понятие скалярного произведения, называется *евклидовым*. Элементы x и y евклидова пространства удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\
 б) \quad & \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \\
 в) \quad & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \\
 г) \quad & \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{и} \quad \langle x, x \rangle = 0, \quad \text{если и только если} \quad x = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

В евклидовом пространстве справедливо очень важное соотношение, известное как неравенство Коши-Буняковского:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,
 \tag{1.10}$$

которое вытекает из свойств (1.9а, б и в) скалярного произведения. Действительно, для любого вещественного λ имеем, согласно (1.9г),

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geq 0.$$

Раскрывая левую часть неравенства, получим:

$$\langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Видно, что квадратный трехчлен (относительно λ) неотрицателен, следовательно его дискриминант отрицателен (или равен нулю), т.е.

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0.$$

Отсюда вытекает (1.10).

Важным следствием из свойств скалярного произведения является то, что норма вектора x может быть определена как

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (1.11)$$

Действительно, условия (1.7а и б) для нормы удовлетворяются.

Для доказательства аксиомы треугольника имеем с учетом (1.10):

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

и соотношение (1.11) удовлетворяет условию (1.7в) для нормы.

В соответствие с (1.11) можно утверждать, что скалярное произведение порождает норму, которая, в свою очередь, согласно (1.8), порождает метрику, благодаря чему пространство со скалярным произведением становится метрическим.

Взаимное отношение двух векторов в *комплексном* пространстве также может быть охарактеризовано с помощью скалярного произведения. Комплексное линейное пространство, в котором каждой паре его элементов x и y (векторов) поставлено в соответствие комплексное число $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение, называется *унитарным*. Элементы x и y унитарного пространства удовлетворяют тем же условиям (1.9), за исключением (1.9в), которое записывается в виде:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*, \quad (1.12)$$

где $*$ – знак комплексного сопряжения.

Заметим, что в унитарном пространстве для любого комплексного числа λ имеем $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda^* \langle x, y \rangle$, так как согласно (1.9 в) и (1.9 б):

$$\langle x, \lambda y \rangle = \langle \lambda y, x \rangle^* = \lambda^* \langle x, y \rangle.$$

В унитарном пространстве, так же как в евклидовом, можно ввести норму $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, удовлетворяющую всем аксиомам о норме.

1.3. Представление элементов векторного пространства

Любой вектор линейного пространства x может быть образован суммированием нескольких векторов u_1, u_2, \dots, u_n со скалярными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i . \quad (1.13)$$

Множество всех линейных комбинаций (1.13) векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ также образует линейное пространство.

Множество векторов u_1, u_2, \dots, u_n называется *линейно-независимым*, если любой из них не может быть выражен через остальные с помощью линейной комбинации. Иначе говоря, когда равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0 \quad (1.14)$$

справедливо только при всех α_i , равных нулю.

Обозначим через V линейное пространство всех комбинаций линейно-независимых векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Каждый вектор $x \in V$ соответствует единственному набору скалярных коэффициентов α_i , следовательно, на основе векторов $\{u_i; i = 1, \dots, n\}$ может быть выражен любой вектор из V . Множество векторов $\{u_i\}$, отвечающих условию линейной независимости, называется *базисом*, сами векторы имеют смысл осей координат, а совокупность чисел α_i – координаты вектора x .

Упорядоченная последовательность коэффициентов $\{\alpha_i\}$ может рассматриваться как n -мерная векторная строка. Это означает, что набор из n вещественных R^n или комплексных C^n чисел является представлением вектора x (в R^n или C^n) по отношению к базису $\{u_i\}$.

В одном и том же пространстве существует не одно множество линейно-независимых векторов, и соответственно, в нем может быть определен не один базис. Чтобы уточнить, какой же базис используется, говорят о пространстве V , *натяннутом* на этот базис.

Одно и то же пространство может быть разбито на подпространства, так же как элементы одного множества могут быть разбиты на ряд подмножеств. Если взять подмножество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, где $m < n$, то множество линейных комбинаций векторов подмножества образует линейное пространство, являющееся подпространством исходного линейного пространства.

Более строго, подмножество V_1 из V является *подпространством*, если:

а) для всех x и y из V_1 $x + y$ также принадлежит V_1 ;

б) для всех x из V_1 и λ из R или C

λx принадлежит V_1 .

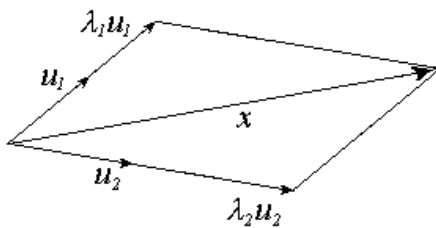


Рис. 1.12.

Представление двумерного вектора x на плоскости (u_1, u_2)

В зависимости от величины n вектор x можно рассматривать в двумерном, трехмерном и т.д., n -мерном пространстве. В двумерном пространстве два параллельных вектора u_1 и u_2 линейно-зависимы, т.к. между ними существует

очевидная линейная связь $u_2 = \lambda u_1$. Два пересекающихся вектора – линейно-независимы, так как между ними нет такой связи, но любой третий век-

тор x можно представить в виде линейной комбинации $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ (рис. 1.12).

Легко видеть, что в трехмерном пространстве будут линейно-независимы только три вектора, в четырехмерном – четыре и т.д. Максимально возможное число линейно-независимых векторов определяет *размерность* пространства.

Если углы между базисными векторами равны $\pi/2$, то такая система координат является *декартовой*, а базисная система ортогональной.

Вектор x , говорят, ортогонален множеству векторов $V_1 = \{y_i\}$, если $\langle x, y_i \rangle = 0$ для всех i . Это обозначают как $x \perp V_1$. Два подпространства V_1 и V_2 называются ортогональными, если все векторы из V_1 ортогональны всем векторам из V_2 , это записывают как $V_1 \perp V_2$.

Пусть векторы u_i в (1.13) образуют линейно-независимую систему. Тогда для определения α_i умножим скалярно левую и правую части (1.13) на векторы v_m попарно ортогональные u_i , т.е.

$$\langle u_i, v_m \rangle = \delta_{im}, \quad (1.15)$$

где δ_{im} – символ Кронекера, $\delta_{im} = 1$ для $i = m$ и $\delta_{im} = 0$ для $i \neq m$

$$\langle x, v_m \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_m \rangle \lambda_i. \quad (1.16)$$

Для α_i , с учетом (1.15), получаем

$$\alpha_i = \langle x, v_i \rangle. \quad (1.17)$$

Коэффициенты α_i называются коэффициентами Фурье в базисе $\{u_i\}$, а базис $\{v_m\}$, удовлетворяющий (1.15), называется *взаимным* базисом. Не трудно видеть, что:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle v_i \quad (1.18)$$

для любого $x \in V$ и любой пары взаимных базисов для V .

Если система координатных векторов $\{u_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ ортогональна, то такой базис называется *самовзаимным (самодуальным)* и

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i. \quad (1.19)$$

Ортогональный базис с нормой координатных векторов, равных единице, называется *ортонормальным*.

$$\langle u_i, u_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{при } i = m, \\ 0, & \text{при } i \neq m \end{cases}$$

В случае ортонормального базиса в евклидовом пространстве легко вычисляется скалярное произведение векторов через их проекции на координатные оси

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{m=1}^n \beta_m v_m \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i^* \quad (1.20)$$

и норма

$$\langle x, x \rangle = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}. \quad (1.21)$$

Расстояние между двумя точками в таком пространстве равно:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2}. \quad (1.22a)$$

Неравенство Коши-Буняковского (1.10) имеет вид:

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \quad (1.22b)$$

Конечномерное векторное пространство, для которого справедливо соотношение

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} < \infty,$$

обозначают $l_2(n)$.

Бесконечномерное векторное пространство, для которого справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty,$$

обозначают l_2 .

Ясно, что если x и y входят в l_2 , то и $y = \lambda x$ входит в l_2 при любом λ , и сумма векторов $x + y$ входит в l_2 . Для l_2 справедливы соотношения (1.20), (1.21) и (1.22) при замене n на ∞ .

1.4. Полнота базиса

Базисная система $\{u_n\}$ называется полной, если размерность соответствующего пространства равна размерности представляемых в этой системе векторов. Например, если в трехмерном пространстве задан базис $\{u_1, u_2\}$, то все векторы, не лежащие в плоскости этого базиса и, следова-

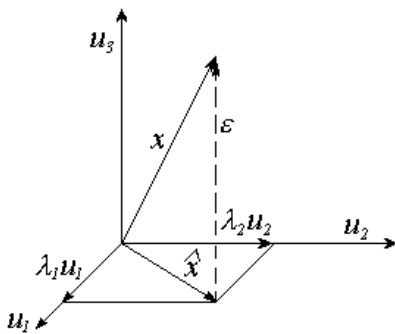


Рис. 1.13.

Представление трехмерного вектора x на плоскости (u_1, u_2) ; ϵ – ошибка представления

тельно, не принадлежащие двумерному пространству, будут представлены не точно, так как для их точного представления необходим еще третий базисный вектор u_3 (рис. 1.13). Однако, иногда для упрощения приходится идти на сокращение размерности пространства, представляя в них векторы с большей размерностью. Это

достигается с помощью процедуры *ортогонального проектирования* вектора, не принадлежащего заданному пространству V_n , на это пространство. *Теорема проектирования* утверждает, что для любого вектора $x \in V$ существует единственный вектор \hat{x} в V_n , задаваемый разложением (см. 1.18)

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle u_i, \quad (1.23)$$

так что разность $(x - \hat{x})$ ортогональна ко всем векторам из V_n , так как

$$\begin{aligned} \langle x - \hat{x}, v_i \rangle &= \langle x, v_i \rangle - \sum_{m=1}^n \langle x, v_m \rangle \langle u_m, v_i \rangle = \\ &= \langle x, v_i \rangle - \langle x, v_i \rangle = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Более того, для любого \tilde{x} из V_n : $\|x - \hat{x}\| < \|x - \tilde{x}\|$.

Вектор \hat{x} называется ортогональной проекцией x на V_n , $\varepsilon = x - \hat{x}$ – погрешность приближения x вектором \hat{x} . Точность приближения ε , или полнота базиса, характеризуется нормой

$$\|\varepsilon\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 = \|x\|^2 - \|\hat{x}\|^2. \quad (1.24)$$

Более точное определение полноты базиса и соответствующего ему пространства заключается в следующем. Пусть мы имеем последовательность векторов $\{x_n\}$ в V_n , которую называют *сходящейся* к x в V , если $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Последовательность векторов $\{x_n\}$ называется последовательностью *Коши*, если $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Если каждая последовательность Коши из V_n сходится к вектору из V , то пространство V называется *полным*. Полное бесконечномерное нормированное пространство, в котором норма порождена скалярным произведением, называется *Гильбертовым пространством* H .

1.5. Функциональное пространство

Эквивалентность пространств. Рассмотрим множество сигналов с ограниченной энергией, заданных на конечном (или бесконечном) интервале времени, и покажем, что на основе линейного векторного пространства l_2 может быть сконструировано функциональное пространство, обозначим его L_2 , в котором каждой точке соответствует определенная функция времени. Два таких нормированных пространства называются алгебраически изоморфными и изометрическими, если между их элементами можно установить взаимнооднозначное соответствие, такое что:

а) алгебраическим операциям над элементами из l_2 соответствуют те же операции над их образами в L_2 ;

б) нормы соответствующих друг другу элементов из обоих пространств равны.

Можно показать, что всякое бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство H алгебраически изоморфно и изометрично пространству l_2 .

Таким образом, множество сигналов L_2 с ограниченной энергией (или мощностью) образует пространство L_2 на основе его эквивалентности с l_2 .

Скалярное произведение в L_2 определяется как

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt, \quad (1.25a)$$

норма

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}, \quad (1.25b)$$

а неравенство Коши - Буняковского имеет вид:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt. \quad (1.25в)$$

Проиллюстрируем изоморфизм на примере конечномерных пространств. Если в векторном пространстве $l_2(n)$ существует ортонормированный базис $\{u_k\}$, то в изоморфном ему пространстве сигналов $L_2(T)$ будет существовать ортонормальная базисная система функций, обозначим ее $\{\varphi(t,k) = \varphi_k(t)\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, т.е.

$$u_k \leftrightarrow \varphi_k(t).$$

Знак (\leftrightarrow) означает взаимное и однозначное соответствие.

Тогда, в соответствии с (1.13), будет существовать разложение сигнала $s(t) \leftrightarrow x$ по системе функций $\{\varphi_k(t)\}$:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(t), \quad (1.26а)$$

где при условии ортонормальности $\varphi_k(t)$ аналогично (1.17)

$$\lambda_k = \langle s(t), \varphi_k(t) \rangle. \quad (1.26б)$$

Определим норму сигнала как

$$\|s\| = \sqrt{\int_T |s(t)|^2 dt} \quad (1.27)$$

и покажем, что с учетом (1.26) она совпадает с (1.21).

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_T |s(t)|^2 dt &= \int_T \left| \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \\ &= \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2 \int_T \varphi_k^2(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=0 \\ k \neq m}}^{n-1} |\lambda_k| |\lambda_m| \int_T \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt. \end{aligned}$$

С учетом ортонормальности базисной системы, имеем

$$\int_T |s(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|^2$$

и

$$\|s\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|^2}.$$
(1.28)

Т.е. норма сигнала, определенная через его энергию, эквивалентна норме евклидова векторного пространства:

$$\|s(t)\| \leftrightarrow \|x\|.$$

Аналогично можно показать, что скалярное произведение двух сигналов равно сумме произведения их проекций на координатные оси

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_T s_1(t) s_2^*(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k \beta_k^*,$$
(1.29)

что эквивалентно (1.20)

$$\langle s_1, s_2 \rangle \leftrightarrow \langle x, y \rangle,$$

а расстояние между двумя сигналами равно

$$\|s_1 - s_2\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - \beta_k)^2},$$
(1.30)

что эквивалентно (1.22а):

$$\|s_1 - s_2\| \leftrightarrow \|x - y\|.$$

Выражения (1.28) и (1.29) называются равенствами *Парсеваля*.

Таким образом, пространства $L_2(T)$ и $l_2(n)$ полностью эквивалентны. Эта эквивалентность пространств порождает функциональное пространство, базисом в котором является система линейно-независимых функций $\{\varphi_k(t)\}$.

Так как $L_2(T)$ образовано множеством $L_{2E}(T)$, то его называют еще пространством квадратично интегрируемых функций:

$$\int_{t \in T} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Условно любой сигнал в таком пространстве графически можно изобразить, как показано на рис. 1.14.

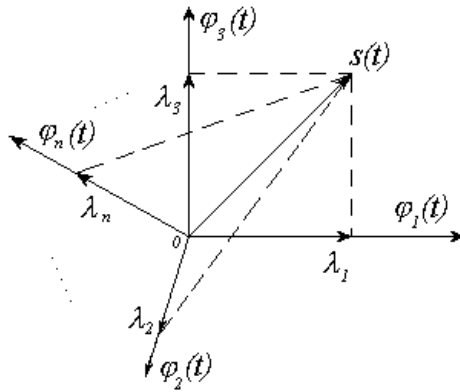


Рис. 1.14.

Представление сигнала $s(t)$ в n -мерном функциональном пространстве

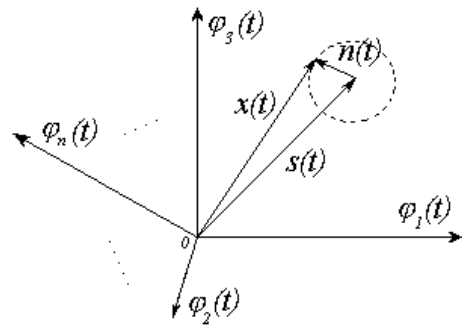


Рис. 1.15.

Представление смеси сигнала $s(t)$ с шумом $n(t)$

Аналогично, можно геометрически представить сумму сигнала и шума $\xi(t)$ с дисперсией σ^2 (см. рис. 1.15):

$$x(t) = s(t) + n(t).$$

Так как $n(t)$ – случайный вектор, то конец вектора $x(t)$ будет лежать на гиперсфере радиуса σ .

1.6. Дискретное представление сигналов

Таким образом, в основе представления и, как будет видно из дальнейшего, анализа сигналов лежит понятие многомерного пространства, в котором определены алгебраические операции над его элементами. Координатными осями в таком пространстве служит система линейно-независимых функций $\{\varphi_k(t)\}$, которая может быть или не быть ортогональной (ортонормированной). Если эта система функций ортонормирована, то проекции любого сигнала $s(t)$ вычисляются наиболее просто

по формуле (1.26.б). Дискретное представление целесообразно рассматривать для сигналов, заданных на конечном интервале времени T . Увеличение интервала ведет неизбежно к увеличению числа базисных функций (так как возрастает число точек исходной функции), что делает такое представление громоздким. В частности, для финитных сигналов интервал представления T целесообразно ограничивать областью, в которой они отличны от нуля.

Подпространства из $L_2(T)$. Пусть V_n – n -мерное подпространство из $L_2(T)$, натянутое на базис $\varphi_k(t)$. Если сигнал принадлежит V_n , то он единственным образом может быть представлен в виде:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_i(t), \quad (1.31)$$

$$s(t) \in V_n, t \in T,$$

где вектор-строка $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ является искомым представлением сигнала уже в пространстве вещественных R^n (или комплексных C^n) чисел.

Выражение (1.31) может быть записано в матричном виде:

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\varphi}'(t), \quad (1.32)$$

где $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ – вектор-столбец базисных функций $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Для определения $\boldsymbol{\lambda}$ умножим скалярно левые и правые части выражения (1.32) на $\boldsymbol{\varphi}(t)$, получим:

$$\boldsymbol{\lambda} \langle \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle = \langle s(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle,$$

где всевозможные скалярные произведения $\langle \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}(t) \rangle$ образуют матрицу скаляров $n \times n$, обозначим ее G .

Если существует обратная матрица G^{-1} , то

$$\boldsymbol{\lambda} = \langle s(t), G^{-1} \rangle$$

или

$$\lambda_k = \langle s(t), \Phi_k(t) \rangle = \int_T s(t) \Phi_k(t) dt, \quad (1.33)$$

где $\Phi_k(t)$ имеет смысл взаимного базиса (аналогично базису v_k в (1.17)).

Причем,

$$\Phi_i(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{ik} \varphi_k(t), \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где γ_{ik} – элементы матрицы \mathbf{G}^{-1} и

$$\langle \varphi_i(t), \Phi_k(t) \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{ik}^* \langle \varphi_i(t), \Phi_k(t) \rangle = \delta_{ik}.$$

Выражения (1.31) и (1.33) носят названия, соответственно, прямого и обратного обобщенного преобразования Фурье. Коэффициенты λ_i называют *спектром* сигнала $s(t)$ в базисе $\{\varphi_k(t)\}$. Если функции $\{\varphi_k(t), k = 1, 2, \dots\}$ ортонормированы, то формулы (1.31) и (1.33) совпадают с (1.26). Представление сигнала в виде (1.31) иногда называют аппроксимацией сигнала обобщенным рядом Фурье или просто представлением сигнала в виде ряда.

Если функции $\{\varphi_k(t), k = 0, 1, 2, \dots\}$ ортогональны, то формулы обобщенного преобразования Фурье приобретают вид:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \varphi_k(t), \quad (1.34a)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{E_\varphi} \int_T s(t) \varphi_k(t) dt = \frac{1}{P_\varphi T} \int_T s(t) \varphi_k(t) dt, \quad (1.34б)$$

где: $E_\varphi = \int_T |\varphi_k(t)|^2 dt$ – энергия базисной функции,

$P_\varphi = \frac{E_\varphi}{T}$ – мощность базисной функции.

Напомним, что для ортонормированных систем $P_\varphi = 1$.

Ортогональное проектирование. Рассмотрим случай, когда сигнал $s(t)$ не принадлежит подпространству V_n . В этом случае аналогично с теоремой проектирования для векторов (1.23) может быть получен единственный сигнал $\hat{s}(t)$, являющийся ортогональной проекцией $s(t)$ на V_n

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \langle s_i(t), \Phi_i(t) \rangle \varphi_i(t).$$

Так же как и в случае векторов, разность $s(t) - \hat{s}(t)$ ортогональна ко всем сигналам из V_n и

$$\|s(t) - \hat{s}(t)\| < \|s(t) - \tilde{s}(t)\|,$$

где $\tilde{s}(t)$ любой другой сигнал из V_n .

Погрешность приближения численно характеризуется нормой

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}\|^2 &= \|s(t) - \hat{s}(t)\|^2 = \int_T |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt = \\ &= \int_T \left| s(t) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t) \right|^2 dt = \quad (1.35) \\ &= \int_T |s(t)|^2 dt - \int_T |\hat{s}(t)|^2 dt = \|s(t)\|^2 - \|\hat{s}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Приближение с нормой (1.35) называется приближением в *средне-квадратическом*.

Естественным путем уменьшения ошибки приближения \mathcal{E} является увеличение размерности пространства V_n путем увеличения числа базисных функций в представлении (1.31), тогда оказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \langle s(t), \Phi_i(t) \rangle \varphi_i(t) = s(t).$$

Такой способ уменьшения погрешности возможен только тогда, когда по каким-либо соображениям число базисных функций можно увеличи-

вать. Чаще всего возникает другая задача: каким образом выбрать базисную функцию, чтобы минимизировать число коэффициентов λ_i в (1.31), достигнув при этом наилучшего приближения.

Из (1.35) для ортонормированных систем следует, что:

$$\|s(t) - \hat{s}(t)\|^2 = \|s(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n |\lambda_i \varphi_i(t)|^2$$

или

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|s(t)\|^2. \quad (1.36a)$$

Соотношение (1.36a) носит название *неравенства Бесселя*, утверждающее, что сумма квадратов коэффициентов разложения ограничена сверху энергией сигнала.

Последовательность

$$s_n(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t)$$

является последовательностью Коши; если $\{\varphi_i(t)\}$ полная ортонормированная система, то эта последовательность сходится к $s(t)$. Для полной ортонормированной системы неравенство Бесселя (1.36) переходит в равенство Парсеваля:

$$\|s(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2. \quad (1.36б)$$

Нетрудно убедиться в том, что для ортогональных систем равенство Парсеваля будет иметь вид:

$$\|s\|^2 = \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 E_k. \quad (1.36в)$$

Это обстоятельство подчеркивает важность ортонормированных (ортогональных) базисных систем для представления сигналов. Здесь нужно

отметить, что всегда можно подобрать такое число базисных функций n_0 , чтобы для заданной величины ошибки $\varepsilon_0 > 0$ выполнялось неравенство:

$$\left\| s(t) - \sum_{i=1}^n \langle s(t), \varphi_i(t) \rangle \varphi_i(t) \right\| < \varepsilon_0 \quad (1.37)$$

при $n > n_0$.

Ортогонализация. Не всякая линейно-независимая система функций, образующая базис, является ортогональной. Однако, с помощью, например процедуры Грама-Шмидта, из этой системы можно синтезировать ортогональный базис.

Пусть $\{u_k(t)\}$ – система линейно-независимых функций, из которой требуется синтезировать ортогональный базис $\{\varphi_k(t)\}$. Способ Грама-Шмидта основан на применении следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= u_0(t), \\ \varphi_1(t) &= \gamma_{10}\varphi_0(t) + u_1(t), \\ \varphi_2(t) &= \gamma_{20}\varphi_0(t) + \gamma_{21}\varphi_1(t) + u_2(t), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_m(t) &= \gamma_{m0}\varphi_0(t) + \gamma_{m1}\varphi_1(t) + \dots + \gamma_{m,m-1}\varphi_{m-1}(t) + u_m(t). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Найдем скалярное произведение произвольной функции $\varphi_r(t)$ с функцией $\varphi_m(t)$. Получим (опустив для простоты переменную t):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_r, \varphi_m \rangle &= \gamma_{m0} \langle \varphi_r, \varphi_0 \rangle + \gamma_{m1} \langle \varphi_r, \varphi_1 \rangle + \\ &+ \dots + \gamma_{m,m-1} \langle \varphi_r, \varphi_{m-1} \rangle + \langle \varphi_r, u_m \rangle. \end{aligned}$$

Так как мы хотим, чтобы функции $\{\varphi_r(t)\}$ были ортогональны, то их скалярные произведения с разными индексами должны быть равны нулю. Отсюда получим:

$$0 = \gamma_{mr} \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle + \langle \varphi_r, u_m \rangle$$

и

$$\gamma_{mr} = -\frac{\langle \varphi_r, u_m \rangle}{\langle \varphi_r, \varphi_r \rangle}. \quad (1.39)$$

Придавая в (1.39) индексу r значения $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$, получим все коэффициенты $\gamma_{m0}, \gamma_{m1}, \dots, \gamma_{m,m-1}$, необходимые для определения функции $\varphi_m(t)$.

Примеры ортогональных систем. Применение процедуры Грама-Шмидта к системе функций t, t^1, t^2, \dots на интервале $[-1, 1]$ дает полную ортогональную систему, порождаемую полиномами Лежандра $P_m(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}t; \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right); \\ \varphi_3(t) &= \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}t^2 - \frac{3}{2}t\right); \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_n(t) &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(t), \end{aligned}$$

где $\{P_n(t)\}$ – полином Лежандра $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$.

Интересные результаты дает применение процедуры Грама-Шмидта к этой же системе функций, дополненной неотрицательной *весовой функцией* $w(t)$. В этом случае ортогонализации подвергается система функций $\{\sqrt{w(t)} \cdot t^m\}$ на различных интервалах. Получаемые при этом ортогональные многочлены ортогональны с весом $w(t)$. К ним относятся хорошо известные многочлены Чебышева (весовая функция $(1-t^2)^{1/2}$, интервал $[-1, 1]$), Эрмита (e^{-t^2} , $(-\infty, +\infty)$), Лагерра (e^{-t} , $(0, +\infty)$).

Целый ряд ортогональных систем порождается решением дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + f_1(t) \frac{dy}{dt} + f_2(t) \cdot y = 0.$$

Это линейное уравнение с переменными коэффициентами имеет множество решений в зависимости от выбора функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. В частности, одним из решений этого уравнения является набор функций, который является основой базиса Фурье:

$$\{y_k(t)\}_f = \{A \cos kt + B \sin kt\},$$

где A и B определенные константы.

Одно время большой популярностью пользовались функции типа "прямоугольной волны" – система функций Уолша, образующая полную ортонормированную систему на интервале $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ с весом $w(t) = 1$.

Функции Уолша, в свою очередь, образуются перемножением функции Радемахера: $r_n(t) = \text{sign}(\sin 2^n \pi t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Функции Уолша, как и функции Радемахера принимают только два значения -1 и 1 (**sign** – функция знака аргумента).

Важным свойством базисных систем является свойство *мультипликативности*, заключающееся в следующем:

а) базисная система $\{\varphi_k(t)\}$ вместе с функциями $\varphi_m(t)$ и $\varphi_n(t)$ содержит также функцию, образованную их произведением

$$\varphi_r(t) = \varphi_m(t) \varphi_k(t);$$

б) помимо функции $\varphi_k(t)$ система содержит также функцию

$$\varphi_l(t) = 1 / \varphi_k(t).$$

Свойство мультипликативности базисных систем особенно ценно для решения различных задач обработки сигналов. Таким свойством, в частно-

сти, обладает комплексный базис Фурье $\{e^{jk\omega_0 t}\}$, так как для всех $m, n, k \in Z$

$$e^{jm\omega_0 t} \cdot e^{jn\omega_0 t} = e^{j(m+n)\omega_0 t}$$

и

$$\frac{1}{e^{jk\omega_0 t}} = e^{j(-k)\omega_0 t}.$$

Причем, это свойство для базиса Фурье проявляется как по переменной k , так и по переменной t . Мультипликативными свойствами обладает также базис Уолша.

Некоторые замечания. При дискретном представлении сигналов необходимо, чтобы базисные функции отвечали следующим условиям:

1. Интервал определения сигнала и интервал ортогональности базисных функций должны совпадать. В противном случае какая-то часть сигнала никак не будет представлена коэффициентами в выбранном базисе. Для того, чтобы привести интервал определения сигнала $s(t)$ (пусть он будет равным T) и интервал ортогональности $\{\varphi_k(t)\}$ (пусть он будет равным X), можно воспользоваться следующим приемом. Выполним замену переменных $t = \frac{T}{X}x$. Тогда базисная функция $\varphi_k\left(\frac{T}{X}x\right)$ "растянется" (или "сожмется") так, что ее начало и конец совпадут с сигналом. При такой операции мощность функции $\varphi_k(x)$ останется неизменной, а энергия увеличится (уменьшится) в $\frac{T}{X}$ раз.

2. Система функций $\{\varphi_k(t)\}$ должна быть упорядоченной (по индексу, показателю степени и т.п.), что позволяет определить ее место в ряду базисных функций. Примером такого упорядочения является система

$$1, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \dots, \sin k\omega t, \dots$$

3. Базисные функции $\{\varphi_k(t)\}$ на конечном интервале ортогональности T должны иметь конечную энергию

$$E_\varphi = \int_T |\varphi_k(t)|^2 dt < \infty \quad (1.41)$$

и, соответственно, конечную мощность

$$P_\varphi = \frac{1}{T} \int_T |\varphi_k(t)|^2 dt. \quad (1.42)$$

На бесконечном интервале $T \rightarrow \infty$ энергия базисных функций бесконечно велика (помимо тех, у которых интервал ортогональности бесконечен). Поэтому для таких базисных функций имеет смысл ортогональности по мощности.

4. Желательно, чтобы базисная система $\{\varphi_k(t)\}$ была нормирована по энергии, тогда $E_\varphi = 1$, или по мощности (для бесконечного интервала ортогональности), тогда $P_\varphi = 1$.

5. Система функций $\{\varphi_k(t)\}$ на интервале определения должна быть ортогональной, т.е. взаимная энергия (или мощность) двух различных базисных функций должна быть равна нулю:

$$E_{\varphi_k, \varphi_l} = \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \int_T \varphi_k(t) \varphi_l^*(t) dt = E_\varphi \delta(k-l), \quad \begin{cases} 0, k \neq l, \\ E_\varphi, k = l, \end{cases} \quad (1.43)$$

где $\delta(k)$ – символ Кронекера: $\delta(k) = \begin{cases} 0, k \neq 0, \\ 1, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$

1.7. Непрерывное (интегральное)

представление сигналов

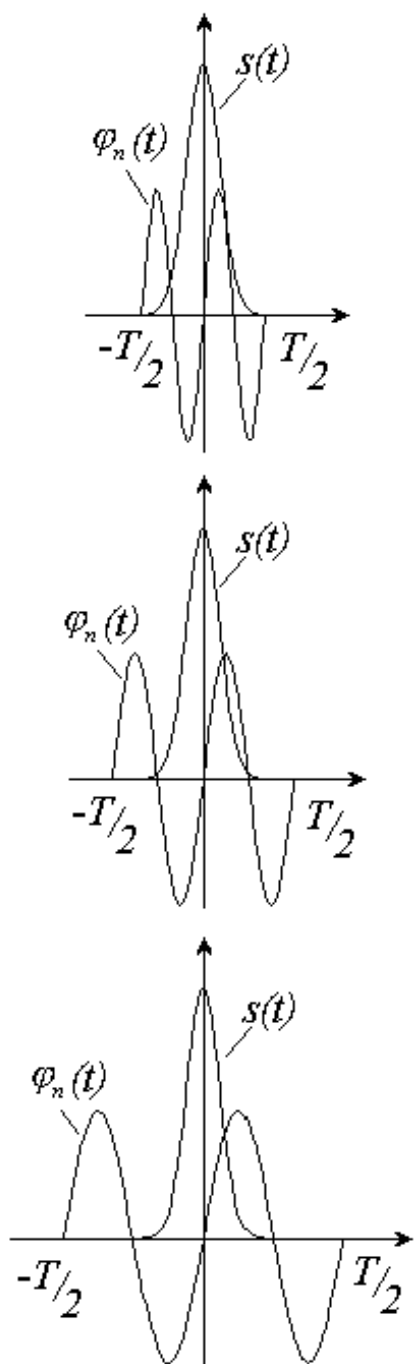


Рис.1.16.

Иллюстрация эффекта деформации базисной функции при увеличении интервала определения сигнала

Дискретное представление сигналов, рассмотренное в предыдущем пункте, удобно для решения задач обработки сигналов, так как каждый сигнал может быть представлен *конечным* числом компонентов.

Однако, в теоретических исследованиях, особенно при рассмотрении сигналов на бесконечном интервале, такое представление либо недостаточно, либо невозможно.

Ниже покажем, что непрерывное представление сигнала $s(t)$ вытекает из дискретного аналога при $T \rightarrow \infty$ и введении вместо индекса k частоты ω , а вместо коэффициентов разложения λ_k – спектральной плотности $S(\omega)$.

Рассмотрим непрерывный сигнал, заданный на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ и представим себе, что этот интервал увеличивается (расширяется) (см. рис. 1.16).

Предположим, что разложение этого сигнала производится по системе

базисных функций $\{\varphi_k(x)\}$ с интервалом ортогональности $\left[-\frac{X}{2}, \frac{X}{2}\right]$. Как было отмечено выше, чтобы совместить этот интервал с интервалом определения функции, необходимо выполнить замену переменной $t = \frac{T}{X}x$. Эта замена неизбежно приведет к деформации базисной функции: при увеличении T она растягивается (см. рис. 1.16, где в качестве базисной для наглядности выбрана некоторая гармоническая функция).

Рассмотрим теперь выражение для аппроксимации функции рядом, в котором удержано n членов

$$s_n(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k(t). \quad (1.43)$$

При увеличении числа членов ряда $s_n(t)$ будет сходиться к $s(t)$ в

среднеквадратическом смысле. Ошибка приближения может оказаться неудовлетворительной при увеличении интервала и некотором фиксированном $n = n_0$ (см. 1.37). Дело в том, что вследствие эффекта растяжения базисной функции ее средняя частота уменьшается и в результате оказывается, что даже базисная функция высшего порядка $\varphi_n(t)$ не способна аппроксимировать быстрые изменения сигнала. Следовательно, для сохранения точности приближения необходимо одновременно с увеличением интервала добавлять следующие по порядку

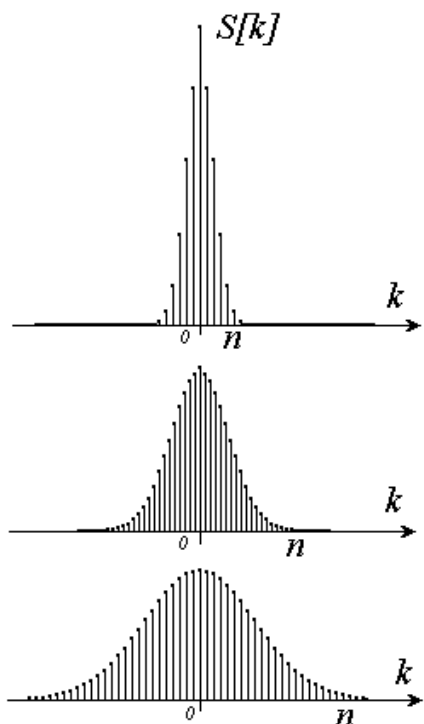


Рис.1.17.
Увеличение числа спектральных составляющих при растяжении интервала

базисные функции. Это приводит к увеличению числа спектральных компонентов и к уменьшению их интенсивности (рис. 1.17), в связи с тем, что при этом должно соблюдаться равенство Парсеваля (1.36б). Сохранить точность приближения можно, поддерживая отношение n/T приблизительно постоянным (увеличивая непрерывно T , приходится дискретно, "шажками" увеличивать n).

В пределе, появляются базисные функции бесконечного порядка и нулевые коэффициенты разложения в ряд, что, в общем, вызывает большие трудности в понимании. Чтобы избежать этих трудностей, вводят понятие частоты ω (для обобщенного преобразования Фурье – обобщенной частоты, которую можно трактовать как среднее число знакоперемен базисной функции в единицу времени) и спектральной плотности $S(\omega)$. Частота ω при этом имеет размерность радиан/сек, $\omega = 2\pi f$, где f имеет размерность Гц.

Обобщенная частота

$$\omega = \frac{2\pi k}{T}. \quad (1.44)$$

Частота ω принимает любые (не только целочисленные) значения, но с ростом k она составляет упорядоченную последовательность

$$\omega = 0, \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \pm \frac{6\pi}{T}, \dots$$

с интервалом $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Теперь в систему базисных функций $\{\varphi_k(x)\}$ может быть введена частота:

$$\{\varphi_k(x)\} = \varphi(x, k) = \left\{ \varphi\left(\omega T, \frac{X}{T} t\right) \right\}.$$

Коэффициенты разложения λ_k для ортогональных систем будут иметь вид:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{P_\varphi} \cdot \frac{1}{T} \int s(t) \varphi^*(\omega, t) dt.$$

Как было отмечено, $\lambda(\omega)$ уменьшается с увеличением T , поэтому, если ввести произведение $S(\omega) = \lambda(\omega)T$, называемое *спектральной плотностью*, ее величина уже не будет стремиться к нулю при $T \rightarrow \infty$. Спектральная плотность имеет смысл доли коэффициента разложения в частотном интервале $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$:

$$S(\omega) = 2\pi \frac{\lambda(\omega)}{\omega_o}.$$

Итак, при $T \rightarrow \infty$ спектральная плотность дискретного спектра будет равна:

$$S(\omega) = \frac{1}{P_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi^*(\omega, t) dt.$$

Для ряда Фурье функции $s(t)$ при $T \rightarrow \infty$ будем иметь

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k T \varphi(k, t) \frac{2\pi}{T}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \lim_{k, T \rightarrow \infty} \lambda_k T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(\omega) T = S(\omega), \\ \lim_{k, T \rightarrow \infty} \varphi_k(t) &= \varphi(\omega, t), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = d\omega \end{aligned}$$

и сумма переходит в интеграл, получим *пару преобразований*:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (1.45a)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{P_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi^*(\omega, t) dt. \quad (1.45b)$$

Для ортонормированных по мощности базисных систем $P_\varphi = 1$.

Выражение (1.45а) является искомым представлением сигнала $s(t)$, принадлежащем L_2 , а (1.45б) – непрерывным преобразованием Фурье этого сигнала. Выражение (1.45а) является формулой обращения, а (1.45б) – формулой разложения; $S(\omega)$ – образ Фурье в базисе $\{\varphi(\omega, t)\}$.

Выражения (1.45) получены в предположении, что породившая их система базисных функций $\{\varphi_k(t)\}$ ортогональна. В биортогональном случае вместо (1.45) будем иметь:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \varphi(\omega, t) d\omega, \quad (1.46a)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Phi^*(\omega, t) dt, \quad (1.46b)$$

где $\Phi(\omega, t)$ – взаимный базис.

Иногда, пользуясь терминологией интегральных уравнений, функцию $\varphi(\omega, t)$ называют *базисным ядром* интегрального преобразования, а функцию $\Phi(\omega, t)$ – *сопряженным базисным ядром*. Функция $S(\omega)$ характеризует *распределение* $s(t)$ относительно $\varphi(\omega, t)$.

Если базисные функции $\{\varphi_k(t), \Phi_k(t)\}$ отвечают условию биортогональности (1.34), то базисные ядра $\{\varphi(\omega, t), \Phi(\omega, t)\}$ должны отвечать этому же условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega, t) \Phi^*(\omega, \tau) = \delta(t - \tau), \quad (1.47)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака (см. ниже).

1.8. Представление и анализ сигналов

Формулы (1.31) и (1.46а) позволяют представить сложный сигнал из L_2 в виде некоторой комбинации компонентов – более простых колебаний (сигналов). Если эти колебания имеют ясный физический смысл, то свойства самого сигнала могут быть объяснены в терминах самих колебаний. Это подводит нас к понятию анализа сигналов. *Анализом сигналов* называется процесс определения и оценки величины компонентов, осуществляемый некоторыми техническими средствами по формулам (1.33) и (1.46б).

Наибольшее распространение в радиотехнике получили гармонические колебания, которые легко генерируются, наглядны, понятны и объясняют многие свойства технических систем. Поэтому представление сигналов в системе гармонических колебаний (синусов и косинусов) и их анализ (традиционный Фурье или частотный анализ), получили наибольшее распространение. При изучении свойств других базисных систем используют так же традиционный анализ Фурье, позволяющий сравнить базисные системы между собой и объяснить механизм их взаимодействия с сигналами.

Приборы, которые осуществляют анализ сигналов, называются *анализаторами спектра*. В соответствии с формулой (1.33) такие анализаторы

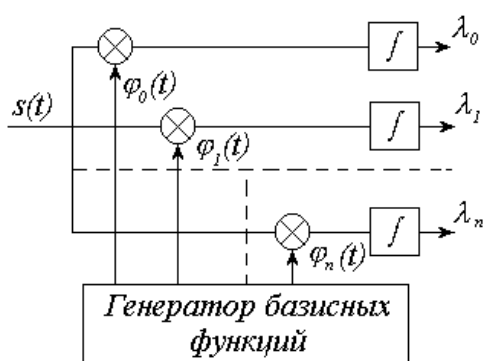


Рис. 1.18.

Пример анализатора
дискретного спектра

строятся по схеме рис. 1.18. Аналогично строятся анализаторы для оценки спектральной плотности $S(\omega)$ по (1.46б). Генератор базисных функций в этом случае генерирует множество функций $\varphi(k\Delta_\omega, t)$ с шагом Δ_ω по частоте ω .

Литература

1. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Ч.1 и 2. М.: Мир, 1983.

2. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974. 343 с.

3. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов.радио, 1972. 351 с.

4. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара. М.: Наука, 1989. 496 с.

5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 380 с.