

Глава 2

Гармонический (частотный) анализ

В математике и физике еще в работах Л. Эйлера и Ж.Л. Лагранжа в 18 веке широкое распространение получил метод разложения периодических функций в ряды по синусам и косинусам, названные тригонометрическими рядами. В 19 веке французский математик и физик Ж. Фурье впервые сформулировал основные требования к функциям, представляемым такими рядами, обеспечивающими их сходимость, заложив основы гармонического анализа. В дальнейшем теория гармонического анализа была развита в работах Дирихле, Гаусса, Римана, Чебышева, Винера, Пэли и других. В частности, гармонический анализ периодических функций был распространен на функции с бесконечным периодом, получивший название *интеграла Фурье*.

Впоследствии теория преобразования Фурье периодических и непериодических функций вышла далеко за пределы математических дисциплин, став мощной теоретической базой в ряде прикладных областей, таких как радиоэлектроника и радиотехника, теория систем, теория автоматического регулирования, теория сигналов и др.

2.1. Ряды Фурье

Рядом Фурье может быть представлена периодическая функция $f(t) = f(t + nT), n \in Z$, удовлетворяющая условиям Дирихле: ограниченность, кусочная непрерывность (разрывы первого рода), конечное число экстремальных значений на периоде (ограниченная вариация), в любой точке периода конечность производной от функции, или хотя бы, правой или левой производной (условие Дини).

Если перечисленные условия удовлетворяются, то в соответствии с (1.34а) функция $f(t)$ может быть представлена рядом

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k] e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad (2.1.1a)$$

где $F[k]$ вычисляется по (1.34б):

$$F[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt. \quad (2.1.1б)$$

Обратим внимание, что в основу рядов Фурье положена ортогональная система функций $\{\varphi_k(t)\}$:

$$\varphi_k(t) = e^{j2\pi k \frac{t}{T}}$$

для $t \in [-T/2, T/2]$ и $k \in Z$.

Легко проверить, что

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_l(t) \rangle = E_\varphi \delta[l - k],$$

где $E_\varphi = T$, так как

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(l-k)\frac{t}{T}} dt = \frac{T}{\pi(l-k)} \sin(\pi(l-k)).$$

Формула (2.1.1б) определяет коэффициенты разложения (2.1.1а) единственным образом. Если $f(t)$ непрерывна, то ряд (2.1.1а) сходится равномерно к $f(t)$. Если $f(t)$ квадратично интегрируема, но необязательно непрерывна, то ряд сходится к $f(t)$ в смысле L_2 . Это означает, что ошибка $\|f(t) - \hat{f}_N(t)\|$ должна стремиться к нулю при $N \rightarrow \infty$, где $\hat{f}_N(t)$ обозначен усеченный ряд (2.1.1а) для k , изменяющемся от $-N$ до N . В точках разрыва предел суммы (2.1.1а) равен среднему $(f(t^+) + f(t^-))/2$. Однако сходимость в этой точке неравномерная, значение $\hat{f}_N(t)$ будет колебаться вблизи точки разрыва (явление Гиббса). Величина колебаний зависит от величины N .

Соотношение Парсеваля (1.29) – скалярное произведение двух произвольных периодических функций $f(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условию Дирихле, вычисленное по одному периоду, равно:

$$\langle f(t), g(t) \rangle_{[-T/2, T/2]} = T \langle F(k), G(k) \rangle.$$

В частности, для $g(t) = f(t)$

$$\|f(t)\|_{[-T/2, T/2]}^2 = T \|F(k)\|^2,$$

где

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_T |f(t)|^2 dt}.$$

Можно показать, что коэффициенты $F[k]$, вычисленные по (2.1.1б) обеспечивают наилучшее приближение рядом (2.1.1а), т.е. всегда ошибка аппроксимации рядом (2.1.1б) меньше ошибки аппроксимации любым другим рядом:

$$\left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k(t) \right\| \leq \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N a_k \varphi_k(t) \right\|,$$

где $\{a_k\}$ – произвольное множество коэффициентов.

Действительно, запишем правую часть неравенства в виде выражения

$$\|f(t)\|^2 - 2T\|a_k, F[k]\| + T\|a_k\|^2,$$

которое после преобразования с учетом (2.1.1б) будет иметь вид:

$$\|f(t)\|^2 - T\|F[k]\|^2 + T\|a_k - F[k]\|^2.$$

Очевидно, что это выражение и, следовательно, ошибка аппроксимации, минимальны, если $a_k = F[k]$.

В заключение отметим, что, заменяя переменную t в (2.1.1) на $t = \frac{Tx}{2\pi}$, получим пару преобразований уже для 2π -периодической функции $f(x)$:

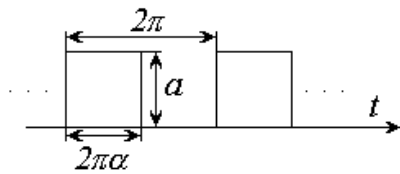


Рис. 2.1а.

Прямоугольный периодический импульс ($\alpha < 1$)

$$F[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx} dx, \quad (2.1.2a)$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[k]e^{jkx}. \quad (2.1.2б)$$

Последние выражения носят более общий характер, так как не зависят от величины периода T .

Рассмотрим несколько примеров преобразования Фурье периодических функций.

Пример 2.1.

Найти коэффициенты ряда Фурье прямоугольного импульса (рис. 2.1а)

Имеем из (2.1.2а)

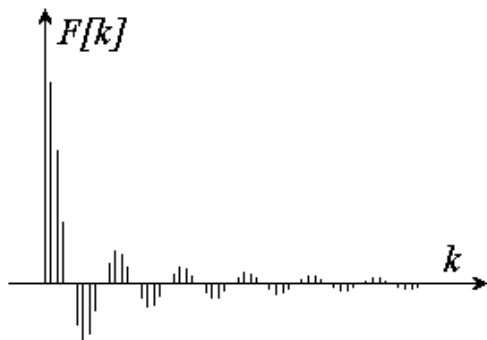


Рис. 2.1б.

Дискретный спектр Фурье прямоугольного импульса (рис. 2.1а)

$$F[k] = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} e^{-jkx} dx = \frac{a}{\pi k} \frac{e^{j\pi k\alpha} - e^{-j\pi k\alpha}}{2j} = a\alpha \frac{\sin \pi k\alpha}{\pi k\alpha}.$$

Дискретный спектр показан на рис. 2.1б.

Пример 2.2.

Найти коэффициенты ряда Фурье функции (рис. 2.2а):

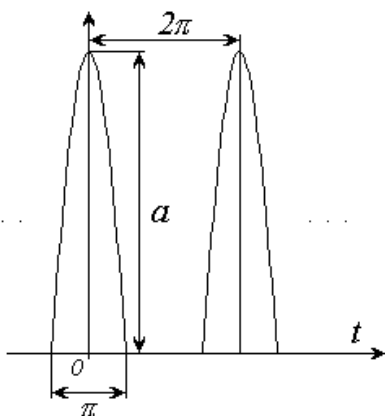


Рис. 2.2а.
Периодическая функция
"полуволна косинусовиды"

$$f(x) = a \cos x \quad \text{для} \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2.$$

Имеем из (2.1.2а):

$$\begin{aligned} F[k] &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x e^{-jkx} dx = \\ &= \frac{a}{4\pi} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jx} e^{-jkx} dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jx} e^{-jkx} dx \right\} = \\ &= \frac{a}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2} [k-1]}{k-1} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} (k+1)}{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$F[0] = \frac{a}{\pi}, \quad F[\pm 1] = \frac{a}{4}, \quad F[2n-1] = 0$$

и

$$\begin{aligned} F[2n] &= \\ &= \frac{a}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2n-1)}{2n-1} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2n+1)}{2n+1} \right\}, \end{aligned}$$

для $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Дискретный спектр функции этого примера показан на рис. 2.2б.

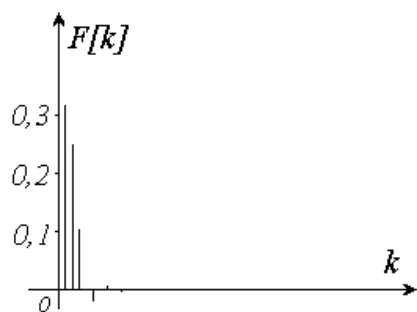


Рис. 2.2б.
Дискретный спектр Фурье
"полуволны косинусовиды"
(рис. 2.2а).

2.2. Интеграл Фурье

Интеграл Фурье – это, по существу, непрерывное представление сигналов, рассмотренное в п. 1.7 в классическом базисе Фурье. В этом случае сигнал рассматривается как функция, заданная на бесконечном интервале. Чтобы получить выражения, аналогичные (1.46), подставим (2.1.1б) в (2.1.1а). Получим

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Так как $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$

При $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$, $k\omega_0 = \omega$ сумма превращается в интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.2.1a)$$

где

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \langle e^{-j\omega t}, f(t) \rangle_t. \quad (2.2.1б)$$

Интеграл (2.2.1б) называется прямым, а (2.2.1а) – обратным преобразованием Фурье. Комплексная функция $F(\omega)$ имеет смысл спектральной плотности, ее иногда называют непрерывным спектром Фурье-функции $f(t)$.

Также как и в случае периодической функции, предполагается, что $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле или, что эквивалентно, абсолютно

интегрируема и удовлетворяет условию Дини. Тогда, если функция $f(t)$ непрерывна, то обратное преобразование (2.2.1а) точно равно $f(t)$. Если $f(t)$ квадратично интегрируема, то обратное преобразование Фурье справедливо в среднеквадратическом (в смысле L_2), т.е. норма

$$\|f(t) - \hat{f}(t)\| \approx 0.$$

Допуская, что прямое и обратное преобразования Фурье существуют, введем обозначение пары Фурье-преобразования:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega).$$

Отметим также, что

$$F^*(-\omega) = F(\omega), \quad F(-\omega) = F^*(\omega) \quad \text{и} \quad f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega),$$

так как

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Преобразование Фурье обладает рядом замечательных свойств.

Линейность. Следует из свойств линейности скалярного произведения. Для постоянных α и β имеем:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(\omega) + \beta G(\omega). \quad (2.2.2)$$

Симметрия.

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega), \quad (2.2.3)$$

которая следует из (2.2.1б) после замены ω на t и сравнения полученного выражения с (2.2.1а):

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сдвиг. Сдвиг во временной области на t_0 приводит к умножению на фазовый коэффициент в Фурье области

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega). \quad (2.2.4a)$$

И наоборот, сдвиг в частотной области приводит к модуляции комплексной экспоненты во временной области

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0). \quad (2.2.4б)$$

Масштабирование. Умножение переменной t во временной области на вещественную константу α приводит к делению на эту константу переменной ω в частотной области, как следует из пары преобразований:

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (2.2.5)$$

Дифференцирование/интегрирование. Определим спектр производной $f'(t)$. Из (2.2.1б) получим, интегрируя по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как функция, представимая интегралом Фурье, обращается в нуль при $t = \pm\infty$, то, следовательно, имеем пару

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega).$$

В случае n -ой производной

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega). \quad (2.2.6)$$

Для спектра Фурье интеграла от функции $f(t)$ получим, интегрируя по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) dt = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}. \quad (2.2.7)$$

Дифференцирование в частотной области дает

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}. \quad (2.2.8)$$

Теорема моментов. Начальный момент n -го порядка (В.2) может быть определен как

$$(-j)^n m_n = \left. \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}. \quad (2.2.9)$$

Теорема о свертке. Спектр свертки функций $f(t)$ и $g(t)$ определяется из соотношения

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega), \quad (2.2.10)$$

где знак (*) означает свертку двух функций.

Для доказательства рассмотрим свертку двух функций из $L_1(R)$

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

и выполним ее преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} G(\omega) d\tau = F(\omega)G(\omega).$$

Свертка в частотной области дает пару преобразований

$$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega), \quad (2.2.11)$$

которая носит название *теоремы о модуляции*.

Действительно, обратное преобразование Фурье свертки

$$F(\omega) * G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1)G(\omega - \omega_1)d\omega_1$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega \right] d\omega_1 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) e^{j\omega_1 t} g(t) d\omega_1 = g(t) f(t). \end{aligned}$$

Хорошей иллюстрацией применения приведенных выше соотношений является вывод формулы о производной свертки:

$$h'(t) = \frac{d[f(t) * g(t)]}{dt}.$$

Фурье-преобразование $h'(t)$ из (2.2.6) с учетом (2.2.10) равно

$$j\omega((F(\omega))G(\omega)) = (j\omega F(\omega))G(\omega) = F(\omega)(j\omega G(\omega)).$$

Отсюда

$$h'(t) = f'(t) * g(t) = f(t) * g'(t). \quad (2.2.12)$$

Эта формула широко используется для вычисления производной сигнала при одновременном его сглаживании с помощью фильтра, весовая функция которого является производной известной функции, например, гауссианы.

Формула Парсевалья утверждает, что взаимная энергия сигналов может быть вычислена по их спектру

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) G(\omega) d\omega. \quad (2.2.13)$$

При $g(t) = f(t)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.2.14)$$

Или, в соответствии с определением нормы (1.25),

$$\|f(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|F(\omega)\|^2.$$

Доказательство формулы (2.2.13) вытекает из (2.2.11). Действительно, так как преобразование Фурье $f^*(t) \cdot g(t)$ имеет вид $\frac{1}{2\pi} (F^*(-\omega) * G(\omega))$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)e^{-j\omega_1 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(-\omega)G(\omega_1 - \omega)d\omega,$$

откуда при $\omega_1 = 0$ получим (2.2.13).

Пример 2.3.

Найти преобразование Фурье функции рис. 2.1а

В соответствии с (2.2.1б) имеем

$$F(\omega) = a \int_{-\pi\alpha}^{\pi\alpha} e^{-j\omega t} dt = \frac{2a}{\omega} \frac{e^{\pi\omega\alpha} - e^{-\pi\omega\alpha}}{2j} = 2\pi\alpha a \frac{\sin \pi\omega\alpha}{\pi\omega\alpha}.$$

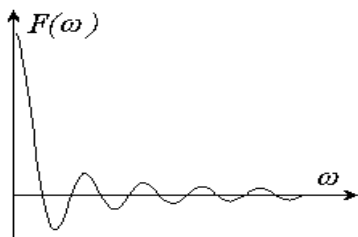


Рис .2.3.

Непрерывный спектр прямоугольного импульса ($\alpha = 0,2$)

Сравнивая этот результат с примером (2.1), видим, что с точностью до постоянного множителя при $\omega = k$ они совпадают, т.е. непрерывный спектр Фурье есть огибающая дискретного спектра (см. рис. 2.3). Этот вывод носит общий характер.

Интересен другой результат. Пусть спектр Фурье имеет вид прямоугольного импульса:

$$F(\omega) = 1 \text{ при } \omega \in [-\Omega_m, \Omega_m].$$

Тогда

$$f(t) = 2\Omega_m \frac{\sin \Omega_m t}{\Omega_m t}.$$

2.3. Дискретизация

Дискретизация – представление непрерывной функции $f(t)$ ее значениями в отдельные, чаще всего равноотстоящие моменты времени $t = n\Delta_t$

$$f(t) \Big|_{t = n\Delta_t} = f[n].$$

Значения функции $f[n]$ в моменты времени $t = n\Delta_t$ называются *отсчетами*. В реальных системах процесс дискретизации непрерывного сигнала во времени осуществляется на входе цифровой системы обработки путем кратковременной подачи сигнала в устройство хранения (чаще всего – конденсатор небольшой емкости), как показано на рис. 2.4.



Рис. 2.4.
Дискретизация непрерывного сигнала

Ключ К1 замыкается в моменты времени $t = n\Delta_t$; в этот же момент времени ключ К2 размыкается, давая возможность конденсатору С зарядиться до напряжения, равного величине сигнала в соответствующий момент времени. Далее ключ К2 замыкается на время Δ_t , а ключ К1 размыкается.

Такой процесс дискретизации, называемый иногда временным квантованием, математически может быть выражен с помощью *дельта-функции Дирака*.

2.3.1. Дельта-функция Дирака

В 1926 году английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ δ , названный им *дельта-функцией*, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения

δ -функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начало координат. Если этот заряд имеет величину e , то его плотность $\rho_o(t) = e \cdot \delta(t)$. Отсюда следует, что функция $\delta(t)$ обладает следующими свойствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Дельта-функция может быть получена через предел

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad (2.3.2)$$

где $\Phi(t)$ – некоторый импульс, такой, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = 1.$$

Примерами функций $\Phi(t)$ являются рассмотренные во Введении функции Лоренца и Гаусса, которые в нормированном виде можно представить как

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \quad - \quad \text{кривая Лоренца} \quad (2.3.3a)$$

и

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \quad - \quad \text{кривая Гаусса} . \quad (2.3.3b)$$

Графики этих функций показаны на рис. В.4.

Рассмотрим функцию

$$\Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2},$$

.интеграл в бесконечных пределах от которой равен единице

При достаточно малых ε величина $\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 \gg 1$, поэтому

$$\Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \approx \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\pi \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\pi t^2},$$

т.е. неограниченно убывает при уменьшении ε и $t \neq 0$. При $t = 0$ и $\varepsilon \approx 0$

функция $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2} = 1$, а функция $\Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \approx \frac{1}{\varepsilon}$ неограниченно возрастает

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из свойств (2.3.1) δ -функции следует, что для любой непрерывной функции $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (2.3.4a)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (2.3.4б)$$

Отметим еще, что

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (a = \text{const} \neq 0) \quad (2.3.4в)$$

и

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0). \quad (2.3.4г)$$

Последнее соотношение вытекает из равенства $\delta(t - t_0) = 0$ при $t \neq t_0$. Пара Фурье-преобразований δ -функции имеет вид:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (2.3.5a)$$

и

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}. \quad (2.3.5б)$$

Или в силу свойства симметрии Фурье-преобразования (2.2.3):

$$e^{+j\omega_0} \leftrightarrow 2\pi\hat{\delta}(\omega - \omega_0), \quad (2.3.6a)$$

$$e^{-j\omega_0} \leftrightarrow 2\pi\hat{\delta}(\omega + \omega_0). \quad (2.3.6b)$$

Напомним, что дискретным аналогом δ -функции Дирака является символ Кронекера $\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$

2.3.2 Отсчеты непрерывной функции

Свертка с δ -функцией любой функции дает значение этой функции в дискретной точке – ее *отсчет* в этой точке. Действительно, в силу свойства (2.3.4) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0). \quad (2.3.7)$$

Совокупность отсчетов непрерывной функции $f(t)$ получается при использовании *гребневой* функции Дирака:

$$d_{\Delta_t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta_t). \quad (2.3.8)$$

Свертка с $f(t)$ дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d(t - \tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta_t) = f_0(t), \quad (2.3.9)$$

где $f_0(t)$ -периодическая функция с периодом Δ_t , так как

$$f_0(t + m\Delta_t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - (n - m)\Delta_t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t - i\Delta_t) = f_0(t).$$

Предположим, что $f(t)$ достаточно гладкая и быстро затухающая функция, такая что ряд (2.3.9) сходится единственно к $f_0(t)$. Мы можем тогда разложить $f_0(t)$ в сходящийся ряд Фурье (см. (2.1.1)):

$$f_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta_t} \int_{-\Delta_t/2}^{\Delta_t/2} f_0(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau \right] e^{j2\pi kt/\Delta_t}. \quad (2.3.10)$$

Используя (2.3.9), получим, что коэффициенты ряда Фурье в этом разложении имеют вид:

$$\int_{-\Delta_t/2}^{\Delta_t/2} f_0(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau = \int_{-\Delta_t/2}^{\Delta_t/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta_t) e^{-j2\pi kt/\Delta_t} dt.$$

Произведя замену $\tau = t - n\Delta_t$ учитывая, что $e^{-j2\pi kn} = 1$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\Delta_t/2}^{(2n+1)\Delta_t/2} f(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j2\pi k\tau/\Delta_t} d\tau = F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

2.3.3. Формула суммирования Пуассона

Для непрерывной и ограниченной функции $f(t)$ на основании (2.3.9), (2.3.10) и (2.3.11), учитывая, что $F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right)$ – коэффициенты Фурье периодической функции $f_0(t)$, получим в соответствии с (2.1.1а) формулу суммирования Пуассона:

$$f_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\Delta_t) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) e^{j2\pi kt/\Delta_t}. \quad (2.3.12)$$

В частности, при $\Delta_t = 1$ в точке $t = 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(2\pi k).$$

Из (2.3.12) с учетом (2.3.5) для гребневой δ -функции получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n\Delta_t) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t / \Delta_t}. \quad (2.3.13)$$

Используя формулу суммирования Пуассона, получим еще несколько интересных соотношений. Покажем, что

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) f(t - n\Delta_t) \leftrightarrow X(\omega) = \\ &= \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) G\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Для этого умножим (2.3.12) слева и справа на $g(t)$ и выполним преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{jt(\omega - 2\pi k / \Delta_t)} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) G\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Пусть $g(t) \equiv 1$ и $f(t) = \delta(t)$. Тогда по (2.3.6б)

$$G(\omega) = 2\pi \hat{\delta}(\omega),$$

а по (2.3.5б)

$$F(\omega) = 1.$$

и из формулы (2.3.14) получаем еще одно важное соотношение:

$$d_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta_t) = \frac{2\pi}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \quad (2.3.16)$$

2.3.4. Теорема отсчетов

Прежде чем сформулировать теорему отсчетов, используя (2.3.4г), получим связь между спектрами дискретизированного колебания $f_{\Delta}(t)$ и его непрерывного прототипа – функции $f(t)$:

$$f_{\Delta}(t) = f(t)d_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t)\delta(t - n\Delta_t). \quad (2.3.17)$$

В соответствии с теоремой о модуляции (2.2.11) и соотношением (2.3.16) получим из левой части (2.3.17)

$$F_{\Delta}(\omega) = F(\omega) * \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\delta}\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta_t}\right). \quad (2.3.18)$$

Выполняя Фурье-преобразование правой части (2.3.17) с учетом (2.3.5б), получим

$$F_{\Delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t)e^{-jn\Delta_t\omega}. \quad (2.3.19)$$

Из (2.3.18) следует, что спектр дискретизированного колебания $f_{\Delta}(t)$ является периодической функцией частоты ω с периодом $\Delta_{\omega} = \frac{2\pi}{\Delta_t}$.

Предположим, что спектр непрерывного колебания $F(\omega)$ занимает полосу от 0 до Ω_m , т.е. $F(\omega) \neq 0$ при $|\omega| \in [0, \Omega_m]$.

Тогда спектр дискретизированного колебания можно изобразить так, как показано на рис. 2.5. Причем, при $\Delta_{\omega} = \frac{2\pi}{\Delta_t} < 2\Omega_m$, будет иметь место наложение ветвей (рис. 2.5а) периодически продолженной функции $F(\omega)$.

Эффект наложения приводит к искажению исходного сигнала при дискретизации.

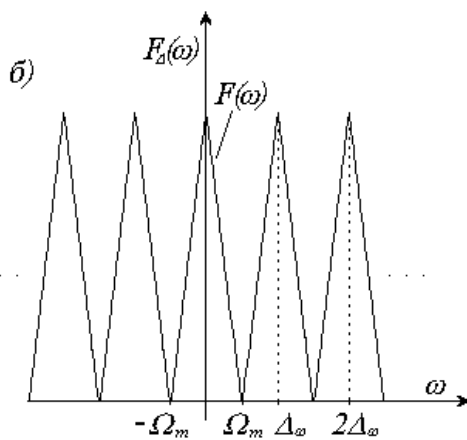
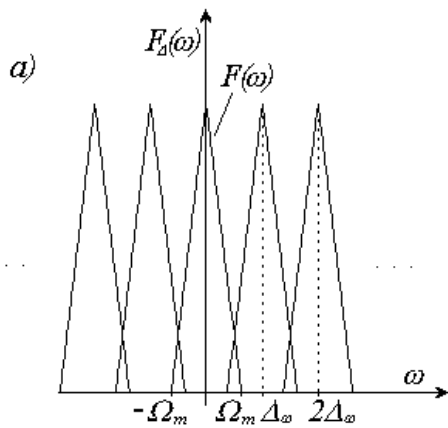


Рис. 2.5.

Спектр дискретизированного колебания

а) $\Delta\omega < 2\Omega_m$,

б) $\Delta\omega = 2\Omega_m$

Таким образом, частота дискретизации должна быть больше частоты самого высокочастотного сигнала Ω_m и, как следует из рис. 2.5б, чтобы избежать наложения – больше, чем в два раза. Тогда будет выполняться соотношение:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta_t} = \Omega_d \geq 2\Omega_m \quad (2.3.20)$$

Теорема отсчетов утверждает следующее:

Если функция $f(t)$ не содержит частот выше Ω_m , то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга на $\Delta_t = \frac{\pi}{\Omega_m}$.

Для доказательства умножим (2.3.18) слева и справа на прямоугольную функцию: $P_{\Omega_m}(\omega) = 1$ при $|\omega| \leq \Omega_m$

и 0 при других значениях ω .

Тогда получим

$$F_{\Delta}(\omega) \cdot P_{\Omega_m}(\omega) = \frac{1}{\Delta_t} F(\omega).$$

К обеим частям последнего выражения применим обратное преобразование Фурье (2.2.1а), в результате, с учетом теоремы о свертке (2.2.10) и Примера 2.3, получим

$$f_{\Delta}(t) * \frac{\sin \Omega_m t}{\Omega_m t} = f(t).$$

Подставляя вместо $f_{\Delta}(t)$ его выражение из (2.3.17) и выполняя операцию свертки с δ -функцией, будем иметь

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t) \frac{\sin \Omega_m(t - n\Delta_t)}{\Omega_m(t - n\Delta_t)}. \quad (2.3.21)$$

Из последнего выражения следует, что непрерывная функция может быть полностью восстановлена по своим отсчетам, взятым с интервалом $\Delta_t \geq \frac{\pi}{\Omega_m}$, с помощью функции $\frac{\sin \Omega_m(t - n\Delta_t)}{\Omega_m(t - n\Delta_t)}$, называемой идеальным интерполятором Котельникова (в зарубежной литературе – интерполятор Шеннона).

Интерполяционная формула (2.3.21) имеет, прежде всего, теоретический смысл, так как она применяется только тогда, когда по отсчетам необходимо восстановить аналоговый сигнал. Для этого достаточно отсчеты $f(n\Delta_t)$ пропустить через идеальный фильтр нижних частот с частотой среза $\omega_c = \Omega_m$. Однако, на практике такой фильтр реализовать невозможно, так же как применить непосредственно формулу (2.3.21). Для этого необходимо знать все отсчеты сигнала на значительном временном интервале. Простейшим способом восстановления сигнала является применение либо аналогового фильтра нижних частот с большой крутизной фронта частотной характеристики, либо метода линейной интерполяции (соединения отсчетных точек прямой линией) с последующим применением низкочастотной фильтрации с целью сглаживания углов интерполяционной кривой.

2.4. Дискретное преобразование Фурье

В результате дискретизации непрерывного колебания $f(t)$ получается дискретная последовательность $f[n]$. Предположим, что эта последовательность имеет конечную длину N . Ее можно рассматривать как дискретный сигнал, заданный при всех $n \in Z$, причем при $n \notin [0, N-1]$ $f[n]=0$, или как периодическую функцию с периодом N , т.е. $f(n) = f(n + lN)$, $l \in Z$. В зависимости от этого будут иметь место различные *дискретные преобразования Фурье*: дискретное во времени преобразование Фурье или дискретно-временные ряды Фурье.

В дискретных преобразованиях особое значение имеет корень N -ой степени из единицы $\sqrt[N]{1} = e^{\frac{-j2\pi}{N}}$ и обозначаемый как W_N . Корень N -ой степени из единицы обладает следующими очевидными свойствами:

$$W_N^N = 1, \quad (2.4a)$$

$$W_N^{kN+i} = W_N^i \quad \text{при } k, i \in Z, \quad (2.4б)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & n = lN, l \in Z, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.4в)$$

2.4.1. Дискретное во времени преобразование Фурье

Рассмотрим последовательность $\{f[n]\}_{n \in Z}$. Дискретное во времени преобразование Фурье (обозначается как DTFT – Discrete-Time Fourier Transform) имеет вид:

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n}, \quad (2.4.2a)$$

где аргумент $e^{j\omega}$ введен для того, чтобы не путать это преобразование с преобразованием Фурье (2.2.1б).

Легко проверить, что $F(e^{j\omega})$ – 2π -периодическая функция, так как $e^{-j\omega n} = e^{-j(\omega+2\pi l)n}$. Тогда, в соответствии с выражением (2.1.2а) для коэффициентов ряда Фурье этой функции получим:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.4.2б)$$

Достаточным условием для сходимости ряда (2.4.2а) является абсолютная суммируемость последовательности $f[n]$, т.е.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| < \infty.$$

Если это условие выполняется, то ряд сходится единственным образом к непрерывной функции от ω . Если последовательность $f[n]$ квадратично суммируемая, то имеет место сходимость в среднеквадратическом.

Предположим, что $f[n] = e^{j\omega_0 n}$, где DTFT такого комплексного колебания с учетом периодичности имеет вид

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0 + 2\pi n)}. \quad (2.4.3)$$

На основании (2.3.6б), получим

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi n).$$

В формулах (2.4.2а-в) частота ω , вообще говоря, не имеет размерности. Но часто возникает необходимость выразить спектр последовательности $f[n]$ в единицах частоты, связанных с интервалом дискретизации Δ_t , т.е. рассматривать $f[n] = f(n\Delta_t)$.

В соответствии с (2.3.18) и (2.3.19) Фурье-преобразование дискретизированного колебания

$$F_{\Delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t) e^{-jn\Delta_t\omega} = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta_t}k\right), \quad (2.4.4)$$

где для удобства спектр непрерывного колебания обозначен как $F_c(\omega)$.

С другой стороны, рассматривая (2.4.2а) в точках $n\Delta_t$, будем иметь

$$F(e^{j\omega\Delta_t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta_t) e^{-jn\Delta_t\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j2\pi n\omega/\omega_s} \quad (2.4.5а)$$

и, используя (2.4.4), получим

$$F(e^{j\omega\Delta_t}) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta_t}k\right) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_c(\omega - k\omega_s). \quad (2.4.5б)$$

В формулах (2.4.4) и (2.4.5) частота ω выражается в радианах/секунду, функция $F(e^{j\omega\Delta_t})$ периодична по частоте ω с периодом

$\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta_t}$. Формула обращения (2.4.2б) будет иметь вид

$$f[n] = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} F(e^{j\omega}) e^{-j2\pi n\omega/\omega_s} d\omega. \quad (2.4.5в)$$

Приведем два важных свойства DTFT. Возьмем две последовательно-сти $g[n]$ и $f[n]$ и пусть их DTFT будут, соответственно, $G(e^{j\omega})$ и $F(e^{j\omega})$, тогда свертка:

$$\begin{aligned} f[n] * g[n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[(n-l)]g[l] = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[l]g[n-l] \leftrightarrow F(e^{j\omega})G(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

При тех же обозначениях, что и выше, справедливо соотношение Парсеваля:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega})G^*(e^{j\omega})e^{j\omega} d\omega. \quad (2.4.7)$$

В частности, при $g[n] = f[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

2.4.2. Дискретно-временные ряды Фурье

Рассмотрим теперь периодическую последовательность $f_0[n]$ с периодом N такую, что $f_0[n] = f_0[n + lN]$, $l \in Z$. Эта последовательность образована периодическим продолжением последовательности конечной длины $f[n]$ на всю ось (рис. 2.6), т.е.

$$f_0[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[n - lN].$$

Такая дискретная во времени функция представима *рядом* Фурье, а само преобразование обозначается как DTFS (Discrete-Time Fourier Series). Из формулы (2.1.1a) для ряда Фурье при $t = n\Delta_t$ имеем

$$f_o(n\Delta_t) = f_o(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_0[k] e^{jk \frac{2\pi}{T} n\Delta_t}.$$

Предположим, что в периоде T умещается N отсчетов функции $f(t)$, т.е. $\frac{T}{\Delta_t} = N$, тогда

$$f_o(n\Delta_t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_o[k] e^{j \frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_o(k) W_N^{kn}. \quad (2.4.8)$$

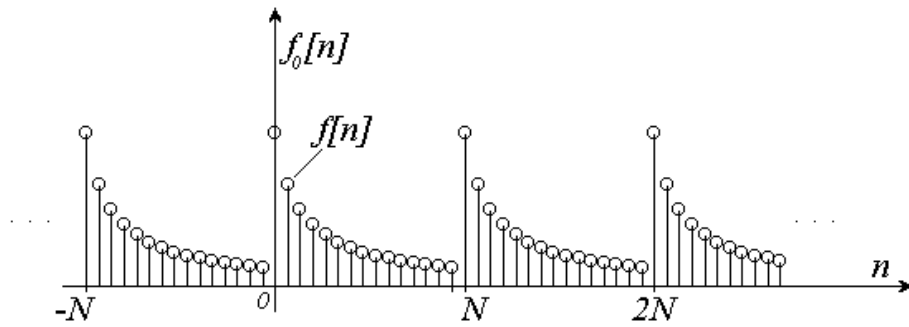


Рис. 2.6.

Периодизация дискретной последовательности $f[n]$

В выражении (2.4.8) частоты спектральных составляющих, образующих $f[n]$, принимают дискретные значения $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$. Легко проверить, что

$$e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k\pm mN)n},$$

$$W_N^{kn} = W_N^{(k\pm mN)n}.$$

Тогда (2.4.8) можно переписать как

$$f_o[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] \cdot W_N^{(k\pm mN)n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mNn} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] W_N^{nk}.$$

Первая сумма при любом значении n равна единице, поэтому ее можно опустить:

$$f_o[n] = \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] W_N^{nk}. \quad (2.4.9a)$$

Иногда пользуются другим выражением для $f_o[n]$, отличающимся коэффициентом, а именно

$$f_o[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] W_N^{nk}. \quad (2.4.9б)$$

Чтобы найти коэффициенты $F_o[k]$, умножим (2.4.9б) слева и справа на W_N^{-nm} и просуммируем результат по n :

$$\sum_{n=0}^{N-1} f_o[n] W_N^{-mn} = \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k] \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k-m)}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k-m)} = \begin{cases} N, & \text{при } k = m, \\ 0, & \text{при } k \neq m, \end{cases}$$

получим окончательно

$$F_o[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_o[n] W_N^{-mn}. \quad (2.4.10)$$

Следует отметить, что эту же формулу можно получить из (2.1.16), заменяя интеграл интегральной суммой.

Из (2.4.9) и (2.4.10) следует, что обе последовательности периодичны с периодом в N отсчетов. Из (2.4.9) и (2.4.10) следует, кроме того, важный вывод о том, что коэффициенты DTFS полностью определяются одним периодом $f_o[n]$ и, наоборот, коэффициенты DTFS конечной длины однозначно определяют саму последовательность. Итак, хотя все соотношения DTFS выведены для периодических последовательностей, ими можно полностью представлять последовательности конечной длины. На этом основании преобразования (2.4.9а-б) и (2.4.10) иногда называют просто дискретным преобразованием Фурье (DFT – Discrete Fourier Transform), имея в виду, что в вычислениях по этим формулам вместо периодических последовательностей $f_o[n]$ и $F_o[n]$ участвуют последовательности конечной длины $f[n]$ и $F[n]$.

DTFS (так же как и DFT) обладают теми же свойствами, что и классическое преобразование Фурье. Напомним некоторые из них.

Линейность. Если $f_o[n]$ и $g_o[n]$ – две периодические последовательности (с периодом N отсчетов) и $F_o[k]$ и $G_o[k]$ – их DTFS, то:

$$f_o[n] + g_o[n] \leftrightarrow F_o[k] + G_o[k]. \quad (2.4.11)$$

Это же справедливо и для DFT.

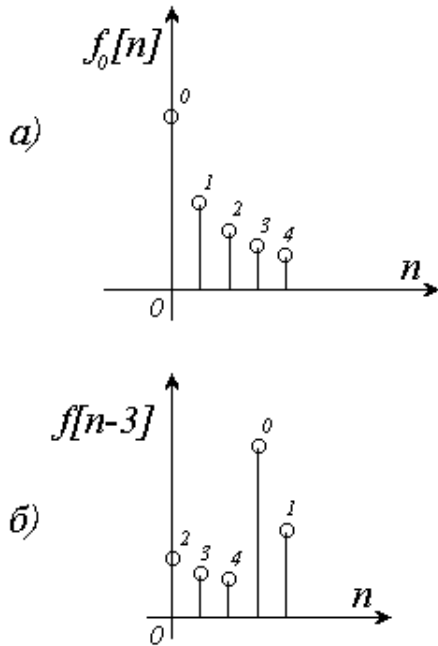


Рис. 2.7.

Круговой сдвиг последовательности
 а) исходная последовательность;
 б) сдвинутая последовательность
 при $n_0 = 3$

Сдвиг. Для периодической последовательности вида $f_0[n - n_0]$ справедливо следующее

$$f_0[n - n_0] \leftrightarrow F_0[k] W_N^{-n_0 k} \quad (2.4.12)$$

Естественно, что в силу периодичности целесообразно рассматривать сдвиг на величину $n_0 < N$. Нетрудно показать, что DFT сдвинутой последовательности (конечной длины) $f[n - n_0]$ получается путем *кругового сдвига* элементов последовательности $f[n]$ на n_0 отсчетов. *Круговой сдвиг* имеет место, когда в результате сдвига последние элементы последовательности

становятся соответственно первыми в последовательности $f[n - n_0]$, что иллюстрируется на рис. 2.7.

Свертка. Свертка двух периодических последовательностей становится теперь круговой (периодической) сверткой:

$$f_0[n] * g_0[n] = \sum_{l=0}^{N-1} f_0[n-l] g[l] = \sum_{l=0}^{N-1} f[(n-l) \bmod N] g[l].$$

Здесь последовательность $f[n]$, также как и выше, сдвигается "по кругу", давая название свертке. Для свертки справедливо соотношение:

$$f_0[n] * g_0[n] = f[n] *_{p} g[n] \leftrightarrow F[k] G[k], \quad (2.4.13)$$

где индекс $(*_{p})$ обозначает круговую свертку.

Формула Парсеваля. Для формулы Парсеваля справедливо, как и прежде,

$$\sum_{n=0}^{N-1} f^*[n]g[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k]G^*[k]. \quad (2.4.14)$$

Коэффициенты DTFS могут быть получены из DTFT следующим образом. Пусть $F(e^{j\omega})$ – DTFT последовательности конечной длины $f[n]$. Сравнивая (2.4.2а) и (2.4.10), получим

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} f_o[n]e^{-j\omega n}.$$

Отсюда следует, что

$$F_o[k] = F(e^{j\omega})_{\omega=k2\pi/N}.$$

Таким образом, мы имеем с учетом (2.4.9б) и последнего равенства

$$\begin{aligned} f_o[n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f[n-lN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_o[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Сравнивая (2.4.15) и (2.3.12) можно видеть, что (2.4.15) является дискретно-временной версией формулы суммирования Пуассона. Для точки $n=0$ из (2.4.15) получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} f[lN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right].$$

Напомним, что здесь $f[n]$ – последовательность конечной длины $n=0,1,2,\dots,N-1$, а $F\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right]$ – ее DTFT, при $\omega = \frac{2\pi}{N}k$.

Подводя итоги обзора преобразований Фурье, приведем выражения для этих преобразований при различных вариантах (непрерывные и дискретные) переменных время-частота.

Таблица 2.1. Фурье-преобразования с различными комбинациями непрерывного/дискретного времени и частоты. Аббревиатурой *CT* и *DT* обозначены непрерывное и дискретное время, а *FT* и *FS* – преобразование Фурье и ряды Фурье соответственно. Другие обозначения: *C*, *D* – непрерывные или дискретные переменные; *P* – периодический сигнал; ω_s – частота дискретизации, $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta_t}$

Преобразование	Время	Частота	Анализ, синтез
а) Фурье-преобразование СТФТ	C	C	$F(\omega) = \int_t f(t) e^{-j\omega t} dt$ $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
б) Ряд Фурье CFTS	C P	D	$F[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$ $f(t) = \sum_k F[k] e^{j2\pi kt/T}$
в) Дискретное во времени преобразование Фурье DTFT	D	C P	$F[e^{j\omega}] = \sum_n f[n] e^{-j2\pi n\omega/\omega_s}$ $f[n] = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F(e^{j\omega}) e^{-j2\pi n\omega/\omega_s} d\omega$
г) Дискретный во времени ряд Фурье DTFS	D P	D P	$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi nk/N}$ $f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{-j2\pi nk/N}$

Различные виды преобразований Фурье иллюстрируются на рис. 2.8.

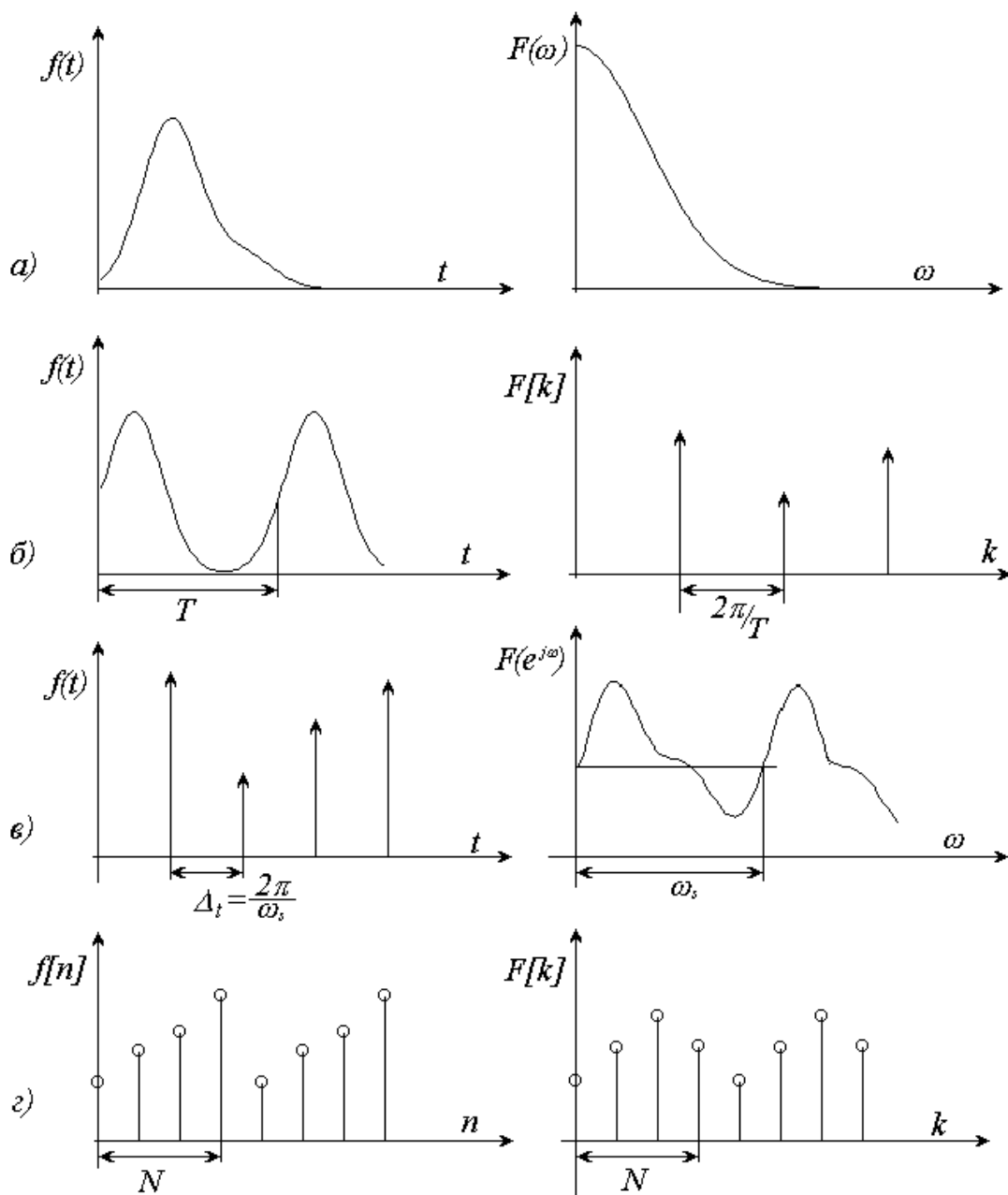


Рис. 2.8.

Преобразование Фурье при различных комбинациях непрерывно-
дискретного переменных времени и частоты.

- а) Непрерывное во времени преобразование Фурье (формулы 2.2.1 - CTFT).*
- б) Непрерывный во времени ряд Фурье (формулы 2.2.1 - CTFS).*
- в) Дискретное во времени преобразование Фурье (формулы 2.4.2 - DTFT).*
- г) Дискретный во времени ряд Фурье (формулы 2.4.9, 2.4.10 - DTFST)*