

2.5. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа позволяет расширить приложение Фурье-преобразования, в частности, в область анализа и синтеза систем обработки данных, в том числе с использованием вейвлетов.

2.5.1. Определения

Как было отмечено выше, любая функция представима в виде интеграла Фурье, если только она абсолютно интегрируема (см. формулу (2.2.1a)). Абсолютно интегрируемая функция должна быть затухающей, т.е. $f(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Однако, для целого ряда важных в теории анализа и, особенно, теории систем, функций это условие не выполняется, в частности, для функций типа единичного скачка или незатухающих гармонических колебаний. Чтобы сделать в этих случаях преобразование Фурье возможным, умножают незатухающую функцию на экспоненту $e^{-\sigma t}$, выбрав $\sigma > 0$ таким, чтобы уже функция $f_o(t) = f(t)e^{-\sigma t} \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Тогда условие абсолютной сходимости выполняется для функции $f(t)e^{-\sigma t}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (2.5.1)$$

при некоторых постоянных $\sigma_{\min} < \sigma < \sigma_{\max}$.

В этом случае для функции $f(t)$, "взвешенной" экспонентой $e^{-\sigma t}$, справедливы прямое и обратное преобразования Фурье (2.2.1):

$$F_o(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi,$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_o(\omega) e^{j\omega t} dt.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-(\sigma+j\omega)\xi} d\xi.$$

Отсюда получим для $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(\sigma+j\omega)\xi} d\xi. \quad (2.5.2)$$

Введем обозначения

$$s = \sigma + j\omega$$

и

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (2.5.3)$$

Тогда $d\omega = \frac{ds}{j}$, пределы интегрирования по s в первом интеграле (2.5.2)

будут лежать в пределах от $\sigma - j\omega$ до $\sigma + j\omega$ и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds. \quad (2.5.4)$$

Формула (2.5.3) называется *прямым (двусторонним)*, а (2.5.4) – *обратным* преобразованием Лапласа.

Для краткости написания прямого и обратного преобразований Лапласа часто употребляются обозначения $F(s) = L[f(t)]$ или $F(s) \leftrightarrow f(t)$.

Преобразование Лапласа есть *функциональное преобразование*,

связывающее точки $F(s)$ в пространстве *изображений* с точками $f(t)$ в пространстве *оригиналов* (п. 1.1).

Иначе говоря, преобразование Лапласа – это Фурье-преобразование функции $f(t)e^{-\sigma t}$, где экспоненциальный вес функций $e^{-\sigma t}$ "улучшает" функцию $f(t)$ таким образом, чтобы преобразование Фурье стало возможным. При этом интеграл (2.5.3) может сходиться не при всех значениях s .

Те значения s , при которых этот интеграл сходится, называется *областью сходимости ROC* (Region of Convergence).

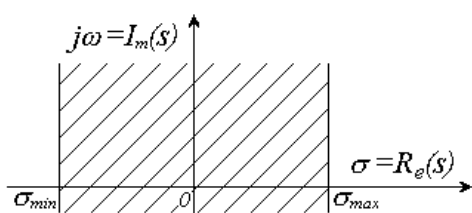


Рис. 2.9.
Область сходимости преобразования Лапласа

Так как сходимость определяется величиной σ , то область сходимости представляет собой полосы на плоскости s , параллельные оси $j\omega$, ограниченные значениями $\sigma_{\max} > \sigma > \sigma_{\min}$ (рис. 2.9).

Если ось $j\omega$ находится внутри ROC для некоторой функции $f(t)$, как на рис. 2.9, то для этой функции существует также преобразование Фурье. $F(s)$ является функцией комплексной переменной, следовательно, для нее справедливы соответствующие положения теории функций комплексной переменной.

Если сигнал является правосторонним, т.е. равен нулю при $t < t_0$, то-

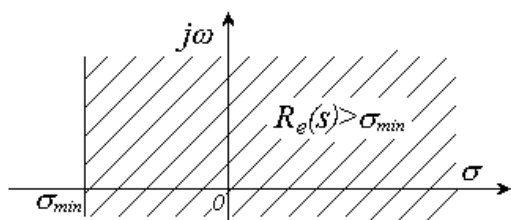


Рис. 2.10.
Область сходимости правостороннего сигнала

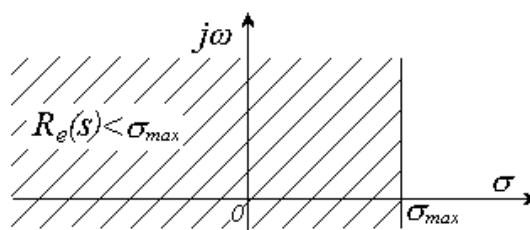


Рис. 2.11.
Область сходимости левостороннего сигнала

гда ROC будет правосторонней, т.е. она простирается от некоторой вертикальной линии $\sigma = R_e(s)$ (R_e – вещественная часть, I_m – мнимая часть комплексного числа), где сходится преобразование Фурье функции $f(t)e^{-\sigma t}$, до плюс бесконечности. Для левостороннего сигнала, равного нулю при $t > t_1$, ROC будет простирается от соответствующей вертикальной линии до минус бесконечности (рис. 2.10, 2.11). Для сигнала конечной длительности областью сходимости ROC является вся комплексная плоскость s . Если сигнал является двусторонним, ROC представляет собой пересечение ROC его лево- и правосторонних частей, т.е. полосу в плоскости s (рис. 2.9).

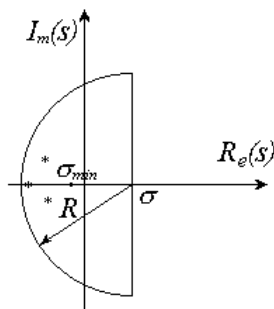


Рис. 2.12.

Пример расположения полюсов (*) Лапласова образа функции $f(t) - F(s)$

Функция $F(s)$ чаще всего представима в виде дробно-рациональной функции как отношение полиномов от s , причем степень полинома числителя, как правило, меньше степени полиномов знаменателя. Особыми точками этой функции являются *полюсы* (корни полинома знаменателя) и *нули* (корни полинома числителя). Для

вещественной функции $f(t)$ полюсы всегда являются комплексно-сопряженными, т.е. имеют вид $\sigma_0 \pm j\omega_0$ (рис. 2.12).

Интеграл (2.5.3) можно разбить на два интеграла:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{\infty} f(-t)e^{st} dt + \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \\
 &= L[f(-t), -s] + L[f(t), s],
 \end{aligned}
 \tag{2.5.5}$$

где $f(-t)$ – левосторонняя часть функции $f(t)$, а $f(t)$ – ее правосторонняя часть.

Для *каузальных* сигналов, равных нулю при $t < 0$, первый интеграл ра-

вен нулю. Тогда имеет место *одностороннее преобразование* Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.5.6)$$

Одностороннее преобразование существует для $\sigma_{\max} = \infty$, так как с увеличением σ функция $|f_0(t)| = |f(t)e^{-\sigma t}|$ только уменьшается. Величина же σ_{\min} , которая носит название *абсциссы абсолютной сходимости*, определяется для каждой функции $f(t)$ отдельно. Так, например, для $f(t) = e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) интеграл (2.5.6) сходится при $\sigma_{\min} = -\alpha$. Если $F(s)$ представима в виде дробно-рациональной функции, что часто бывает при исследовании реальных линейных систем, то σ_{\min} должно находиться правее самого правого полюса функции $F(s)$.

В целом, для сходимости интеграла (2.5.6) необходимо, чтобы функция $f(t)$ росла не быстрее некоторой показательной функции: $|f(t)| \leq Me^{\sigma_{\min} t}$, где M и σ_{\min} – постоянные, тогда для $\sigma > \sigma_{\min}$, т.е. для всех точек, лежащих правее прямой $R_e(s) = \sigma_{\min}$ (рис. 2.10), получим

$$\int_0^{\infty} |e^{-\sigma t} f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma - \sigma_{\min})t} dt = - \left. \frac{Me^{-(\sigma - \sigma_{\min})t}}{\sigma - \sigma_{\min}} \right|_0^{\infty} = \frac{M}{\sigma - \sigma_{\min}}.$$

Из выражения (2.5.5) следует, что двустороннее преобразование сходится тогда и только тогда, когда оба интеграла $L[f(t); s]$ и $L[f(-t); -s]$ абсолютно сходятся. Областью сходимости для левостороннего сигнала при этом будет часть комплексной s -плоскости, лежащей левее самого левого полюса $F(s)$, так как при $\sigma \rightarrow -\infty$ функция $|f(-t)e^{\sigma t}|$ уменьшается, начиная с некоторой $\sigma = \sigma_{\max}$. Тогда областью сходимости двустороннего преобразования, как уже отмечалось, будет полоса в s -плоскости, определен-

ная двумя абсциссами абсолютной сходимости (рис. 2.9).

2.5.2. Обратное преобразование

Формула обращения (2.5.4) позволяет находить функцию $f(t)$ по ее Лапласову изображению $F(s)$. На основании леммы Жордана интегрирование (2.5.4) в пределах от $\sigma - j\infty$ до $\sigma + j\infty$ может быть заменено интегрированием по замкнутому контуру, образованному прямой $R_e(s) = \sigma$ и замыкающей ее концы полуокружностью радиуса R . При этом для правостороннего сигнала все полюсы функции $F(s)$ должны лежать внутри контура слева от прямой $R_e(s) = \sigma$ (рис. 2.12).

Тогда, согласно теореме о вычетах, интеграл (2.5.4) равен сумме вычетов (**Res**) подынтегральной функции $F(s)e^{st}$ относительно всех m особых точек s_i этой функции, лежащих внутри контура интегрирования, т.е.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^m \mathbf{Res}[F(s_i)e^{s_i t}], \quad (2.5.7)$$

причем $\sigma_1 \geq \sigma_{\min}$.

Не вдаваясь в детали, с которыми можно ознакомиться в специальной литературе, отметим лишь, что вычеты относительно простого полюса s_0 определяются по формуле:

$$\mathbf{Res}[\Phi(s_0)] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)\Phi(s) = e^{s_0 t} \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)F(s), \quad (2.5.8)$$

где обозначено

$$\Phi(s) = F(s)e^{st}.$$

Вычет относительно полюса n -ой кратности в точке s_0 определяется как

$$\mathbf{Res}[\Phi(s_0)] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s-s_0)^n \Phi(s)]. \quad (2.5.9)$$

Для облегчения вычисления прямого и обратного преобразований Лапласа имеются специальные таблицы. Здесь же приведем несколько примеров.

Пример 2.4.

Пусть $F(s) = \frac{1}{s}$ – Лапласов образ правостороннего сигнала. Эта функция имеет единственную особую точку $s_0 = 0$, и интегрирование в (2.5.7) ведется по контуру слева от прямой $R_e(s) = \sigma_1 > 0$. По формуле (2.5.8) имеем:

$$\mathbf{Res}[\Phi(s_0)] = e^{s_0 t} \lim_{s \rightarrow 0} (s-0)F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} = 1.$$

Следовательно, функция $f(t)$ имеет вид единичного скачка:

$$f(t) = u(t) = 1 \quad \text{для } t > 0$$

и

$$f(t) = 0 \quad \text{для } t < 0.$$

Пример 2.5.

Пусть $F(s) = \frac{1}{s+a}$ – Лапласов образ правостороннего сигнала. Эта функция имеет единственный полюс в точке $s = -a$, и интегрирование в (2.5.7) ведется слева от прямой $R_e(s) = \sigma_1 > -a$. По формуле (2.5.8) имеем:

$$\mathbf{Res}[\Phi(-a)] = e^{-at} \lim_{s \rightarrow -a} \left[(s+a) \frac{1}{s+a} \right] = e^{-at}.$$

Следовательно:

$$f(t) = e^{-at} \quad \text{для } t > 0.$$

Пример 2.6.

Пусть функция $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$ – Лапласов образ правостороннего сигнала с полюсами в точках $s_1 = -1$ и $s_2 = -2$. σ_{\min} расположена правее самого правого полюса, т.е. $\sigma_{\min} > -1$ и интегрирование в (2.5.7) ведется слева от прямой $R_e(s) = -1$. Функция $f(t)$ при этом равна сумме вычетов в точках s_1 и s_2 , т.е.

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0.$$

Предположим теперь, что в последнем примере $F(s)$ есть Лапласов образ только *левостороннего* сигнала. Тогда $\sigma_{\max} < -2$ и интегрирование в (2.5.7) должно происходить по контуру по часовой стрелке справа от прямой $R_e(s) = -2$. Тогда

$$f(t) = -(e^{-t} - e^{-2t}), \quad t \leq 0.$$

Предположим, наконец, что функция $F(s)$ примера 2.6 – Лапласов образ *двустороннего* сигнала. Тогда областью сходимости $F(s)$ является полоса в s -плоскости $-2 < R_e(s) < -1$. Для определения $f(t)$ по формуле (2.5.7) интегрирование ведется по двум контурам: один слева от прямой $R_e(s) = -2$, второй – справа от прямой $R_e(s) = -1$.

Тогда

$$f(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t).$$

Последний пример показывает, что в преобразованиях Лапласа обязательно необходимо учитывать область сходимости и характер сигнала.

2.5.3. Свойства

Свойства преобразования Лапласа аналогичны свойствам преобразования Фурье. Отметим некоторые из них.

Свертка

$$f(t) = h(t) * g(t) \leftrightarrow H(s)G(s) \quad (2.5.10)$$

с областью сходимости, являющейся пересечением областей сходимости $H(s)$ и $G(s)$.

Производная.

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) \quad \text{при} \quad f(0) = 0.$$

Для доказательства рассмотрим одностороннее преобразование Лапласа:

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$L[f'(t)] = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sF(s) - f(0),$$

т.к. при

$$R_e(s) = \sigma > \infty,$$
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{st} f(t) = 0.$$

Преобразование Лапласа n -ой производной при равенстве нулю всех $n - 1$ производных в точке $t = 0$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)$$

с областью сходимости, совпадающей с областью сходимости $F(s)$.

2.5.4. Применение к анализу систем

Преобразование Лапласа позволяет значительно облегчить решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые описывают класс линейных систем. Связь между входом $f(t)$ и выходом $y(t)$ линейной системы может быть выражена в виде уравнения:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = f(t), \quad (2.5.11)$$

где a_k – действительные числа, зависящие от параметров системы.

Функцию $f(t)$ называют иногда входным воздействием системы. При отсутствии такого воздействия уравнение (2.5.11) превращается в линейное однородное дифференциальное уравнение.

После выполнения преобразования Лапласа (2.5.11) при нулевых начальных условиях, получим

$$Y(s) \cdot \sum_{k=0}^N a_k s^k = F(s), \quad (2.5.12)$$

где $Y(s)$ и $F(s)$ – Лапласовы образы выхода и входа системы, соответственно.

Из (2.5.12) следует, что Лапласов образ выхода линейной системы связан с Лапласовым образом входа $F(s)$ соотношением

$$Y(s) = H(s)F(s), \quad (2.5.13)$$

где $H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$ носит название *передаточной функции системы*.

темы.

Передаточная функция характеризует конструктивные особенности системы и поэтому, как правило, известна уже на этапе проектирования.

Выполняя обратное преобразование (2.5.13) по формуле (2.5.7), можно получить выходной сигнал $y(t)$ при известном входном воздействии $f(t)$.

Однако о свойствах системы можно судить только по одной передаточной функции системы $H(s)$. При этом, одним из важнейших свойств является устойчивость системы.

Систему называют *устойчивой*, если после прекращения входного воздействия система возвращается в исходное состояние. Свидетельством устойчивости системы является вид решения однородного уравнения (2.5.11) при равной нулю правой части. Применение преобразования Лапласа позволяет не только упростить это решение, но и исследовать устойчивость системы по соотношениям между коэффициентами уравнения.

Известно, что решение однородного уравнения (2.5.11) имеет вид:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t}, \quad (2.5.14)$$

где A_i – постоянные, а s_i – корни характеристического уравнения (в данном случае – не кратные):

$$D(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0. \quad (2.5.15)$$

Из (2.5.14) следует: чтобы функция $y(t)$ была ограниченной, (затухающей), необходимо, чтобы корни s_i были либо отрицательными действительными величинами, либо комплексными с отрицательными вещественными частями. Иначе говоря, все корни характеристического уравнения должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости $s = \sigma + i\omega$ (см. рис. 2.12).

Из (2.5.13) следует, что корни характеристического уравнения являются полюсами передаточной функции $H(s)$. Следовательно, чтобы система была устойчивой, необходимо, чтобы все ее *полюсы* находились в левой полуплоскости переменного s . Зная передаточную функцию $H(s)$, можно определить реакцию системы на *любое* входное воздействие $f(t)$, а имен-

но, выполняя обратное преобразование Лапласа по формуле (2.5.7)

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)X(s)e^{st} ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{F(s)}{D(s)} e^{st} ds.
 \end{aligned}
 \tag{2.5.16}$$

Реакция $y(t)$ линейной системы на входное воздействие может начаться не ранее самого воздействия, поэтому всегда можно положить, что $y(t) = 0$ при $t < 0$. Это означает, что при выполнении условия абсолютной интегрируемости функции $y(t)e^{-\sigma t}$ для $y(t)$ существует одностороннее преобразование Лапласа с областью сходимости, лежащей правее вертикальной прямой $Re(s) = \sigma > \sigma_{min}$.

Если этому условию удовлетворяет отношение Лапласовых образов $F(s)/D(s)$, то по (2.5.16) может быть выполнено обратное преобразование и найдено $y(t)$. При этом интегрирование ведется по замкнутому контуру, охватывающему все особые точки, лежащие в левой полуплоскости. В соответствии с теоремой о вычетах, этот интеграл равен сумме вычетов относительно полюсов функции $\frac{F(s)}{D(s)}$.

Обратное преобразование Лапласа передаточной функции $H(s)$ называют импульсным откликом системы и обозначают как $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} H(s)e^{st} ds.
 \tag{2.5.17}$$

Положим, что $h(t) \equiv 0$ при $t < 0$ (такие системы называются физически реализуемыми), это означает, что при выполнении условия абсолютной интегрируемости функции $h(t)e^{-\sigma t}$ для $h(t)$ существует одностороннее преобразование Лапласа с областью сходимости, лежащей правее вертикаль-

ной прямой $R_e(s) = \sigma_{\min}$. Кроме того, область сходимости должна включать и мнимую ось $j\omega$, так как полюсы, лежащие на мнимой оси, приводят к неустойчивой системе. Если этому условию удовлетворяет Лапласов образ $1/D(s)$, то по (2.5.17) с помощью теоремы о вычетах может быть выполнено обратное преобразование и найден импульсный отклик $h(t)$.

2.6. Z-преобразование

Z-преобразование – обобщение дискретного во времени преобразования Фурье. Оно эффективно применяется для решения разностных уравнений и исследования дискретных систем, в частности, цифровых фильтров.

2.6.1. Определение

Как было отмечено, ряд (см. 2.4.2а)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} \quad (2.6.1)$$

сходится только тогда, когда последовательность $f[n]$ абсолютно суммируемая. Однако часто это не так, поэтому, чтобы расширить класс дискретных функций, представимых рядами, $f[n]$ умножают на степенную функцию r^{-n} ($r > 0$), такую, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|r^{-n} < \infty, \quad (2.6.2)$$

где r – модуль некоторой новой комплексной переменной $z = r \cdot e^{-j \arg z} = \xi + j\eta$, $j = \sqrt{-1}$.

Тогда преобразование (2.6.1) может быть модифицировано в *двустороннее z -преобразование*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}, \quad (2.6.3)$$

сходимость которого определяется выражением (2.6.2).

Предположим, что (2.6.3) справедливо для всех z таких, что $|z|=r_1$. Это множество точек на комплексной z -плоскости образует окружность радиусом r_1 . Точно также (2.6.3) может быть справедливо для всех z таких, что $|z|=r_2$. В общем случае, областью сходимости является кольцеобразная область в z -плоскости

$$0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty. \quad (2.6.4)$$

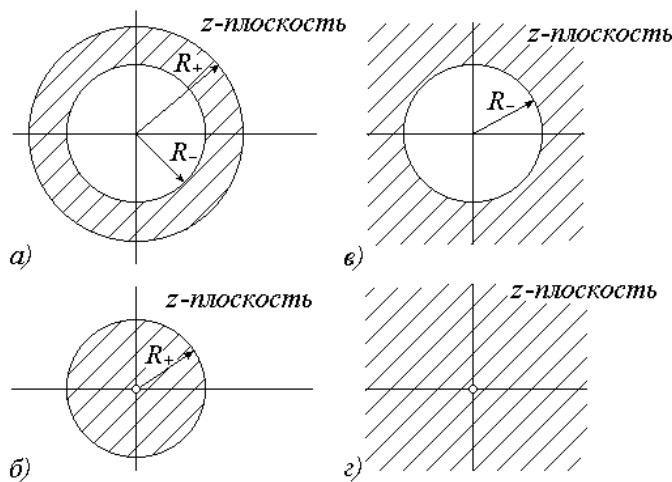


Рис .2.13.

Область сходимости $|z|=r_1$ -преобразования

- а) общий случай $0 \leq R_- < |z| < R_+ \leq \infty$;
- б) область сходимости внутри круга $|z| < R_+$ ($z=0$ может быть исключен);
- в) область сходимости вне круга $|z| > R_-$ ($z = \infty$ может исключаться);
- г) область сходимости – вся z -плоскость (возможно, за исключением $z=0$ и $z=\infty$)

Заметим, что $z=0$ или $z=\infty$ могут быть включены или не включены в область сходимости (см. рис. 2.13).

Рассмотрим пример последовательности, для которой z -преобразование существует, в то время как дискретное преобразование Фурье – нет. Таким примером является функция единичного скачка

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что условие абсолютной суммируемости не выполняется, в то время как:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u[n]| r^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} < \infty, \quad \text{при } r > 1,$$

т.е. область сходимости лежит вне единичной окружности.

Заметим, что z -преобразование, определенное на единичной окружности $z = e^{j\omega}$, совпадает с дискретным преобразованием Фурье (2.6.1). При этом $|z| = 1$, а $\arg z = \omega = \text{const}$:

$$F(z)_{z=e^{j\omega}} = F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.6.5)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что если область сходимости включает единичную окружность, то дискретное преобразование Фурье DTFT последовательности существует, в противном случае – нет.

Установим связь z -преобразования с преобразованием Лапласа. Для этого выполним двусторонние преобразования Лапласа левой и правой частей выражения (2.3.11) при $\Delta_t = 1$. Получим:

$$F_{\Delta}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-ns}.$$

Сравнивая последнее выражение с (2.6.3), видим, что

$$F_{\Delta}(s) = F(z)_{z=e^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-ns}.$$

Функция $F_{\Delta}(s)$ – 2π -периодическая вдоль прямой линии $R_e(s) = \sigma$, так как

$$F_{\Delta}(s + j2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-n(s+j2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-ns} e^{-2\pi n} = F_{\Delta}(s).$$

Рассмотрим связь между изображением на комплексной плоскости переменной $s = \sigma + j\omega$ и переменной $z = \zeta + j\eta$, связанной с s соотношением $z = e^s$.

С учетом этого, координаты произвольных точек $z_i = \xi_i + j\eta_i$ z -плоскости и $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ s -плоскости связаны между собою следующим образом:

$$\begin{aligned} z_i &= \xi_i + j\eta_i = e^{(\sigma_i + j\omega_i)}, \\ \xi_i &= e^{\sigma_i} \cos \omega_i, \\ \eta_i &= e^{\sigma_i} \sin \omega_i. \end{aligned} \quad (2.6.6a)$$

Представляя z в полярных координатах $z = re^{j \arg z}$, получим для точки z_i :

$$\begin{aligned} r_i = |z_i| &= \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2} = e^{\sigma_i}, \\ \arg z_i &= \omega_i + 2\pi k. \end{aligned} \quad (2.6.6b)$$

Из соотношений (2.6.6) легко видеть, что все точки отрезка мнимой оси s -плоскости от 0 до 2π переходят в z -плоскости в окружность радиуса $r_0 = 1$, так как при этом $\sigma_i = 0$, а $\arg z_i$ изменяется от 0 до 2π (рис. 2.14). При движении точки по мнимой оси $j\omega$ от $-j\infty$ до $+j\infty$ s -плоскости в z -плоскости она будет бесконечное число раз обходить указанную окружность.

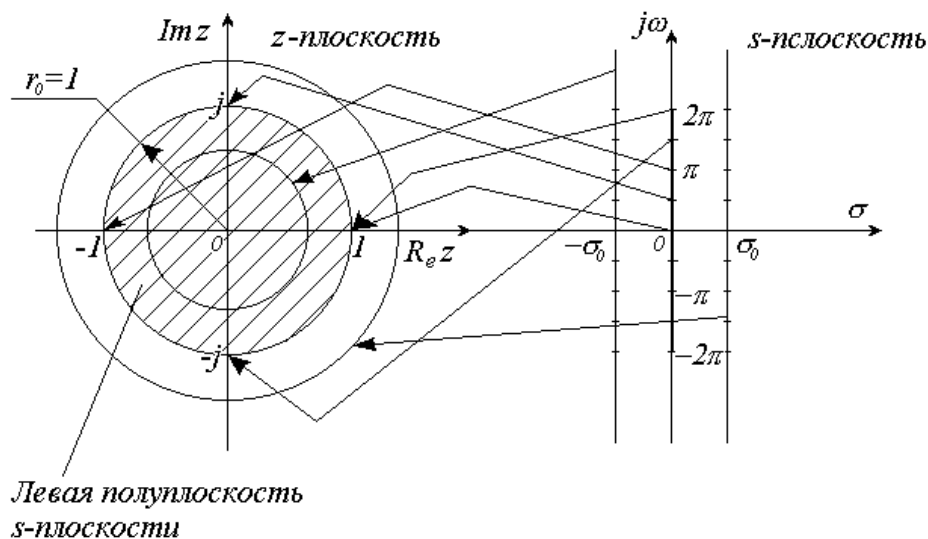


Рис. 2.14.
Трансформация прямых s -плоскости в окружности в z -плоскости

Рассмотрим теперь произвольную прямую s -плоскости $\sigma = \sigma_0$, параллельную оси $j\omega$. Тогда из соотношений (2.6.6) будет следовать, что при $\sigma_0 > 0$ все точки отрезка этой прямой от 0 до 2π переходят в z -плоскости в окружность радиуса $r_0 = e^{\sigma_0} > 1$. При $\sigma_0 < 0$ эти точки образуют окружность радиуса $r_0 = e^{-\sigma_0} < 1$. Точка, пробегающая в s -плоскости вдоль прямой от $\sigma_0 - j\infty$ до $\sigma_0 + j\infty$, будет бесконечное число раз вращаться по соответствующей окружности.

Множество точек полуплоскости, лежащей левее любой из указанных прямых s -плоскости, в z -плоскости окажутся внутри соответствующей окружности, так как их радиусы-векторы $r_i < r_0$.

Аналогично, правая полуплоскость трансформируется во внешнюю часть соответствующего круга z -плоскости.

Отметим также, что указание области сходимости, так же как и в Лапласовом преобразовании, для z -преобразования является обязательным, так как одному и тому же z -преобразованию, определенному в различных областях сходимости, соответствуют различные исходные последовательности. Если последовательность правосторонняя (левосторонняя) область сходимости распространяется за пределы (внутри) окружности с радиусом, соответствующим модулю крайнего внешнего (внутреннего) полюса. Напомним, что в s -плоскости – это область справа (слева) прямой, параллельной оси $j\omega$ (см.рис.2.13.б и в), если последовательность двусторонняя, область сходимости представляет собой кольцо (см.рис.2.13.а); в s -плоскости – это полоса.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.7.

Предположим, что $f[n]=1$ при $n=0$ и $f[n]=0$ во всех остальных случаях. Эта функция представляет собой аналог δ -функции Дирака в

дискретном случае – единичный импульс. Она обозначается также:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Выполняя ее z -преобразование согласно (2.6.3), получим:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1. \quad (2.6.7)$$

$F(z)$ сходится на всей z -плоскости.

Пример 2.8.

Пусть теперь $f[n] = u[n]$, т.е. представляет собой единичный скачок, правостороннюю последовательность:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (2.6.8)$$

Это преобразование сходится во всех точках z -плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > 1$, т.к. имеет одну единственную особую точку $z = 1$.

Напомним, что для функции единичного скачка не существует дискретного преобразования Фурье, так как в область сходимости (2.6.8) не входит единичная окружность.

Пример 2.9.

Найти z -преобразование экспоненциальной последовательности

$$f[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Подставляя $f[n]$ в (2.6.3), получим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad (2.6.9)$$

с областью сходимости при $|z| > a$, так как $F(z)$ имеет только одну особую точку $z = a$.

Пример 2.10.

Найти z -преобразование единичного скачка (левосторонней последовательности):

$$f[n] = \begin{cases} -u[n-1], & n \leq 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Имеем

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u[-n-1]z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z^{-1}}. \quad (2.6.10)$$

Очевидно, что сумма в (2.6.10) сходится только для всех $|z| < 1$. Следовательно, $F(z)$ имеет область сходимости $|z| < 1$.

Обратим внимание, что z -преобразования (2.6.8) и (2.6.10) совпадают, но имеют совершенно различные области сходимости, потому что это – различные последовательности.

Пример 2.11.

Найти z -преобразование комплексной экспоненты

$$f[n] = \begin{cases} e^{j\omega n}, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Вычисляя z -преобразование, получим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1} e^{j\omega})^n = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{j\omega}} \quad (2.6.11)$$

с областью сходимости $|z| > 1$, так как единственной особой точкой является $z = e^{j\omega}$.

2.6.2. Обратное z -преобразование

Существуют два пути определения последовательности $f[n]$ по его z -преобразованию $F(z)$. Первый, формальный путь, это контурное интегрирование. Вторым – разложение на элементарные дроби с последующим использованием таблицы обратного z -преобразования.

Рассмотрим метод контурного интегрирования, который уже применялся при вычислении обратного преобразования Лапласа.

Умножим выражение (2.6.3) слева и справа на $\left(\frac{1}{2\pi j} z^{k-1}\right)$ и затем проинтегрируем результат по контуру в z -плоскости:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C z^{k-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n} dz.$$

Контур интегрирования C должен окружать все особые точки функции $F(z)$ и лежать в области сходимости, что позволяет изменить порядок суммирования и интегрирования в правой части. Получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \left(\frac{1}{2\pi j} \int_C z^{-n+k-1} dz \right).$$

Интеграл в круглых скобках правой части последнего выражения может быть определен в соответствии с теоремой Коши. А именно, интеграл равен единице только при $k = n$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C z^{-n+k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

и мы имеем окончательно:

$$f[k] = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{k-1} dz. \quad (2.6.12)$$

Контур интегрирования должен лежать в пределах области сходимости.

Согласно теореме о вычетах, интеграл (2.6.12) равен сумме вычетов подынтегральной функции $F(z)z^{k-1}$ относительно всех особых точек этой функции, лежащих *внутри* контура интегрирования. Для этого можно воспользоваться формулами (2.5.8) и (2.5.9), заменив при этом комплексную переменную s на комплексную переменную z .

Если преобразование представляет собой дробно-рациональную функцию, обратное преобразование лучше всего производить *методом разложения на элементарные дроби* с последующим почленным обращением с помощью таблицы преобразований.

Обращение осуществляется наиболее просто, если $F(z)$ может быть разложено по степеням z^{-1} .

Действительно, если, например, известны все простые (некратные) полюсы p_i и нули z_i функции $F(z)$, то ее можно представить как:

$$F(z) = \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})}.$$

При $M < N$ это выражение приводится к виду:

$$F(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - p_i z^{-1}}, \quad (2.6.13)$$

где $\alpha_i = (1 - p_i z^{-1})F(z) \Big|_{z=p_i}$.

С учетом (2.6.9) каждое слагаемое имеет обратное z -преобразование типа $\alpha_i (p_i)^n$. Тогда имеем:

$$f[n] = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i (p_i)^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.6.14)$$

В более сложных случаях целесообразно пользоваться таблицей преобразований.

*Таблица z -преобразований
для правосторонних последовательностей*

Последовательность $f[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$	z -преобразование $F(z) = \sum_{k=0}^N f[k]z^{-k}$
1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
k	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
k^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\binom{n}{k}, \quad n = 1, 2, \dots$	$\frac{z^{-n}}{(1-z^{-1})^{n+1}}$
a^k	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
ka^k	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

2.6.3. Свойства

Свойства z -преобразования аналогичны свойствам преобразования Фурье. Отметим некоторые из них.

Свертка во времени. Свертка двух дискретных последовательностей $x[n]$ и $y[n]$ имеет вид:

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X[Z]Y[Z].$$

Сдвиг во времени.

$$x[n-i] \leftrightarrow z^{-i} X(z) \quad (2.6.15)$$

с областью сходимости, совпадающей с областью сходимости $X(z)$.

Отсюда z -преобразование единичного импульса, называемого иногда оператором задержки, имеет вид: $\delta[n-i] \leftrightarrow z^{-i}$.

Вот почему обозначения z^{-1} , z^{-2} и т.д. часто используются в блок-схемах для обозначения задержек.

2.6.4. Применение к анализу линейных инвариантных во времени систем

Применение z -преобразований значительно облегчает решение линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, которыми описывается целый класс дискретных систем. Оно позволяет ввести понятие передаточной функции дискретной системы, анализ которой дает возможность судить о ее свойствах, вводить корректирующие элементы для изменения характеристик системы.

Линейное разностное уравнение, связывающее вход $x[n]$ и выход $y[n]$ системы можно записать в виде:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (2.6.16)$$

где a_n и b_n – действительные числа, определяющие параметры системы.

После выполнения z -преобразования (2.6.16) с учетом (2.6.15) при нулевых начальных условиях получим передаточную функцию системы

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}, \quad (2.6.17)$$

которую легко привести к виду (2.6.13).

Z -преобразование передаточной функции есть импульсная переходная функция дискретной системы $h[n]$, так как

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}.$$

Пример 2.12.

В качестве примера рассмотрим разностное уравнение (2.6.16) первого порядка

$$y[n] = x[n] + A y[n-1]$$

с нулевыми начальными условиями ($y(-1) = 0$).

Одностороннее z -преобразование имеет вид

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - Az^{-1}},$$

тогда:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - Az^{-1}}.$$

Воспользовавшись приведенной выше таблицей, получим

$$h[n] = A^n, \quad n \geq 0.$$

Очевидно, что система будет устойчива, если $A < 1$, т.к. в этом случае

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n < \infty.$$

2.7. Понижение и повышение числа отсчетов

Как будет видно из дальнейшего, алгоритмы спектрального вейвлет-анализа включают операции понижения (down-sampling) или повышения (up-sampling) числа отсчетов.

Иногда процесс понижения числа отсчетов называют децимацией (decimating – термин, который произошел из исторического факта уничтожения каждого десятого воина побежденной римлянами армии противника). Операцию повышения числа отсчетов называют в отечественной литературе *интерполяцией*. Если отсчеты взяты из некоторой непрерывной функции, то понижение или повышение числа отсчетов может привести к искажению исходной информации. Поэтому эти операции всегда сопровождаются фильтрацией.

2.7.1. Децимация

Понижение числа отсчетов (или прореживание) последовательности $x(n)$ на целое число N – это изъятие (отбрасывание) всех отсчетов, не кратных N . В результате получаем новую последовательность $y[n]$ такую, что

$$y[n] = x[nN].$$

Влияние такой операции на исходный сигнал легко проследить в Фурье-области. Из (2.4.4) и (2.4.5) имеем:

$$X(e^{j\omega}) = X\left(e^{\frac{j\omega\Delta_t}{4}}\right) = X_{\Delta_t}\left(\frac{\omega}{\Delta_t}\right) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{\Delta_t} - k \frac{2\pi}{\Delta_t}\right).$$

Следовательно:

$$Y(e^{j\omega}) = X_{N\Delta_t}\left(\frac{\omega}{N\Delta_t}\right) = \frac{1}{N\Delta_t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\omega}{N\Delta_t} - k \frac{2\pi}{N\Delta_t}\right).$$

Заменяя в последнем выражении переменные $k = nN + l$, получим

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N\Delta_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} X\left(\frac{\omega}{N\Delta_t} - \frac{2\pi n}{\Delta_t} - \frac{2\pi l}{N\Delta_t}\right).$$

При $\Delta_t = 1$ $e^{2\pi n} = 1$ для всех n , поэтому получим окончательно:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((\omega - 2\pi k)/N). \quad (2.7.1)$$

Из последнего выражения вытекает, что спектр Фурье при децимации растягивается в N раз. Этот эффект иллюстрируется рис. 2.15 при $N = 3$.

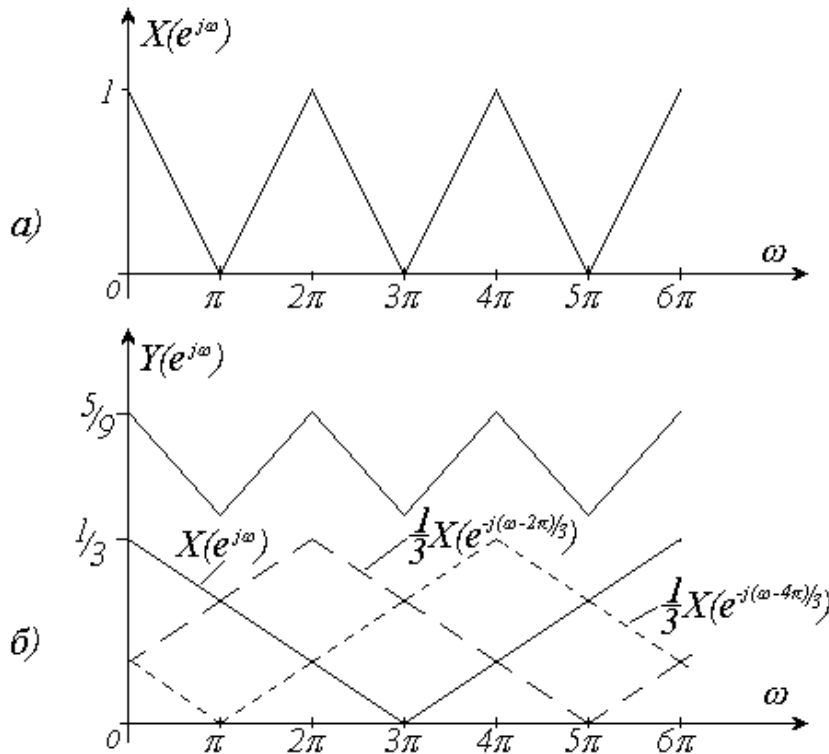


Рис. 2.15.

Иллюстрация наложения спектров при децимации:

а) исходный спектр дискретизированного колебания $x[n]$;

б) спектр после децимации $Y(e^{j\omega})$

Сравнивая его с рис. 2.5.1, видим, что эффект децимации аналогичен дискретизации сигнала с частотой, меньшей его максимальной частоты.

Именно поэтому происходит наложение спектров "прореженных" колебаний. Как уже отмечалось выше, такое наложение вызывает искажение

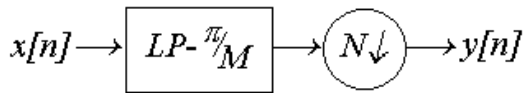


Рис. 2.16.

Иллюстрация процедуры прореживания отсчетов $x[n]$:

LP – низкочастотный фильтр;
 $N \downarrow$ – условное обозначение прореживания на N отсчетов

исходного сигнала. Чтобы его избежать, процедуре прореживания должна всегда предшествовать низкочастотная фильтрация с частотой отсечки $\frac{\pi}{N}$ и усилением $\frac{1}{N}$, как показано на рис. 2.16

Импульсный отклик идеального фильтра нижних частот с частотой отсечки π/N имеет вид:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/N}^{\pi/N} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}}.$$

Соотношение (2.7.1) полезно расширить на z -плоскость формальной заменой $e^{+j\omega}$ на z . Тогда, обозначая как прежде $W_N = e^{-j2\pi/N}$, получим:

$$Y(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(W_N^k z^{1/N}). \quad (2.7.2)$$

Это равенство и, соответственно, равенство (2.7.1) могут быть получены другим путем.

Рассмотрим последовательность $x'[n]$, значения которой равны $x[n]$ при значениях n , кратных N и нулю в остальных случаях. Ее спектр Фурье будет равен

$$X'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nN\Delta_t) e^{-j\omega n} = \frac{1}{N\Delta_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{N\Delta_t}\right).$$

Используя подстановку, аналогичную при выводе формулы (2.7.1), при $\Delta_t = 1$ получим:

$$X'(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right). \quad (2.7.3)$$

Или, переходя к z -преобразованию:

$$X'(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(W_N^k z). \quad (2.7.4)$$

Отметим, что последовательности $y[n]$ и $x'[n]$ отличаются наличием нулей между отсчетами $x[nN]$ последовательности $x'[n]$. Отбрасывание этих нулей – сжатие данных, т.е. переход к последовательности $y[n]$, означает, что в z -преобразовании (2.7.4) z необходимо заменить на $z^{1/N}$, получим при этом (2.7.2).

2.7.2. Интерполяция

Повышение числа отсчетов на целое число M – это добавление M нулевых отсчетов между соседними отсчетами исходной последовательности $x[n]$, или:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/M], & n = kM, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это ведет к уменьшению на M периода дискретизации Δ . Следовательно, в Фурье области будем иметь

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{jM\omega}) \quad (2.7.5)$$

или в z -плоскости

$$Y(z) = X(z^M). \quad (2.7.6)$$

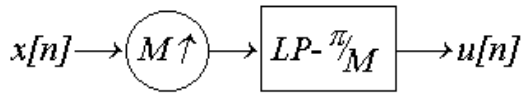


Рис. 2.17.

Процедура повышения числа отсчетов: LP – фильтр нижних частот с частотой отсечки π/M ; $M \uparrow$ – условное обозначение процедуры повышения числа отсчетов

Такое повышение числа отсчетов ведет к сужению в M раз спектра исходной последовательности.

Для того, чтобы повышение числа отсчетов не сопровождалось искажениями из-за M -кратного повторения на периоде 2π спектра

исходного сигнала, необходимо после этой операции применить идеальный фильтр нижних частот с частотой отсечки π/M , как показано на рис. 2.17. Импульсный отклик такого фильтра должен иметь усиление, равное единице

$$h[n] = \frac{\sin \frac{\pi n}{M}}{\frac{\pi n}{M}}$$

Легко видеть, что $h[kM] = \delta[k]$. Следовательно, на выходе фильтра будем иметь

$$u[n] = y[n] * h[n],$$

и при $n = kM$

$$u[kM] = y[kM] = x[k],$$

т.е. идеальный фильтр, или идеальный интерполятор, пропускающий входные отсчеты без искажений, заполняя промежуточные недостающие отсчеты.

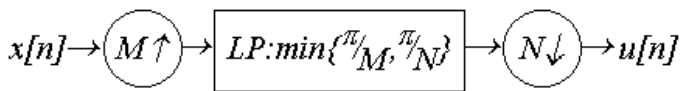


Рис. 2.18.

Изменение частоты отсчетов в рациональное число раз: LP – фильтр нижних частот с частотой отсечки, равной минимальной из двух π/M или π/N

Изменение частоты отсчетов в нецелое число раз (например M/N) получается путем последовательного использования операций

повышения и понижения частоты дискретизации с интерполяционным фильтром между ними, как показано на рис. 2.18.

Литература

1. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 381 с.
2. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Гос. изд. физ.-мат. л-ры, 1962. 236 с.
3. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Т. 1-2.
4. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 487 с.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 847 с.
6. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления. М.: Гос. изд. физ.-мат. л-ры., 1958. 296 с.
7. Vatterli M., Kovačević J. Wavelet and Subband Coding. Prentice Hall PTR, 1995. P.488.