Л.В. Новиков

Основы вейвлет-анализа сигналов

Учебное пособие

Санкт-Петербург

1999

УДК:621.391
519.21

Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. 1999. 152 с.: ил.

Приведен математический аппарат, в основном применяемый в теории вейвлетов, в его инженерном изложении, т. е. на языке понятий и определений, близком для специалистов с высшим техническим образованием. Понятие вейвлет-анализа введено в терминах привычного для инженеров Фурье-анализа. Даны определения различных типов вейвлет-анализа в зависимости от вида переменных – дискретных или непрерывных.

Пособие предназначено для инженеров и исследователей, а также аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области обработки сигналов.

Учебное пособие создано при поддержке ФЦП "Интеграция" УНЦ "Оптика и научное приборостроение" (проект А0141) по проекту "Поддержка и развитие учебного центра "Приборы и средства автоматизации для научных исследований" на базе СПГУАП и ИАнП РАН"

Автор: Лев Васильевич Новиков
E-mail: nov@iai.rssi.ru

Редактор: З. К. Мусатова

Оригинал - макет подготовлен
Коробейниковой Е.В.

Подписано к печати 11.10.99 г.
Тираж 100 экз.
Отпечатано ООО "МОДУС+", Санкт-Петербург
Усл. печ. л. 7,6
Усл. изд. л. 6,3
Заказ 152

Предисловие

Настоящая книга является попыткой построить мост между абстрактными понятиями математики и конкретными образами инженерного мышления. Использование вейвлетов в обработке сигналов находится в самом начале пути. Если учитывать, что история практического использования Фурье-анализа насчитывает уже многие десятилетия, вейвлет-анализу можно предсказать не менее продолжительное будущее.

Несмотря на интенсивное развитие теории вейвлетов в последнее десятилетие, это направление анализа сигналов продолжает привлекать внимание специалистов. Публикации на русском языке по вейвлетам (иногда их называют – всплесками) посвящены в большинстве случаев математическим вопросам теории, трудно понимаемой инженерами, имеющими совершенно иную подготовку. Однако, любая теория материализуется только тогда, когда ею овладевают массы именно инженеров, способных эту теорию воплотить в машины, приборы, прикладные программы и другие полезные вещи. В то же время, уровень развития теории вейвлетов таков, что ее уже давно пора адаптировать до уровня инженерного понимания сущности спектрального анализа сигналов в базисе функций вейвлет. Отсутствие соответствующей литературы на русском языке по этому вопросу является серьезным пробелом отечественной школы спектрального анализа, в особенности учитывая огромный интерес к этой области в прежние годы, приведший к выходу в свет ряда серьезных монографий и огромного количества публикаций.

Для освоения теории вейвлетов, даже в ее инженерном изложении, необходимо достаточно глубокое понимание некоторых разделов математики, таких как функциональный анализ, преобразования Фурье и Лапласа, z-преобразование. Этим вопросам в книге уделено большое внимание и именно в тех аспектах, которые важны для теории вейвлетов. По глубокому убеждению, без этого невозможно квалифицированное и грамотное применение в различных приложениях результатов теории вейвлетов, которая является, как уже отмечалось, в основном прерогативой математики и развивается математиками. Собственно вейвлетам посвящена третья глава книги, причем, в объеме, который только вводит читателя в этот вид анализа сигналов, оставляя за пределами такие разделы, как *кратномасштабный (мультиразрешающий)* анализ, синтез вейвлетов и алгоритмов, примеры применения и др. вопросы. Автор уверен, что, освоив материал в объеме книги, читатели смогут самостоятельно разобраться в публикациях, посвященных применению вейвлетов в интересующей их области.

В основу книги легли труднодоступные зарубежные публикации, а также исследования самого автора, начатые еще в 1984 году с момента выхода в свет монографии в соавторстве с Русиновым Л.А. по синтезу и применению смещенных во времени базисных функций[1], которые являются, по существу, в терминах теории вейвлетов *масштабными функциями*. Надеюсь, что настоящее пособие дополнит изданные недавно на русском языке цитируемые книги А.П. Петухова и В.И Воробьева в соавторстве с В.Г Грибуниным и послужат общей задаче освоения методов вейвлет - анализа широкими инженерными массами.

Автор приносит благодарность к.ф - м. н. А. Л. Буляницу, взявшему на себя нелегкий труд прочесть рукопись и сделать ряд полезных замечаний по ее улучшению.

Автор благодарит также Лаврову С. Ю. и, в особенности, Коробейникову Е. В., выполнивших компьютерный набор и подготовку книги к изданию.

---

[1] Русинов Л.А., Новиков Л.В. Спектральный подход к первичной обработке сигналов. Изд. Ленинградского университета, 1984, Ленинград, 156 с.

В любом случае есть только один способ правильно вести спор: надо сначала хорошо понять, о чем идет речь.

Платон

Введение

Прогресс в области элементной базы вычислительной техники, естественно, требует постоянного внимания специалистов, занимающихся ее эффективным использованием в различных областях науки и техники. Одной из таких областей является построение процессоров реального времени для обработки сигналов первичных преобразователей (датчиков, сенсоров и т.п.) сложных технологических и экспериментальных установок, аналитических приборов, испытательных и диагностических центров. Эти обстоятельства стимулируют развитие не только аппаратной, но и алгоритмической поддержки процессоров обработки сигналов, что на практике проявляется в привлечении к разработке алгоритмов все более сложного математического аппарата.

Любая система обработки информации представляет собой единство трех компонент: технических средств (hardware), программного обеспечения (software) и алгоритмического обеспечения (brainware). В настоящей книге обсуждаются вопросы алгоритмического обеспечения спектрального анализа в базисе вейвлет с использованием математического аппарата, обычно читаемого в курсах математики учебных вузов, и поэтому не может быть препятствием для понимания сути вопроса.

Вейвлет-преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого – классическое преобразование Фурье. Применяемые для этой цели базисы названы *вейвлетами*[2] – солитонообразными функциями двух аргументов – масштаба и сдвига. Введенные сравнительно недавно, в 80-х годах, они в последующие годы получили быстрое теоретическое развитие и широкое применение в различных областях обработки сигналов и изображений. В отличие от традиционного преобразования Фурье, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерное представление исследуемого сигнала в частотной области в плоскости частота–положение. Аналогом частоты при этом является масштаб аргумента базисной функции (чаще всего – времени), а положение характеризуется ее сдвигом. Это позволяет разделять крупные и мелкие детали сигналов, одновременно локализуя их на временной шкале. Иными словами, вейвлет-анализ можно охарактеризовать как *локализованный спектральный анализ* или – *спектральный анализ локальных возмущений*. Аппаратурным аналогом одного из видов вейвлет-анализа является многоканальная полосовая фильтрация сигнала при постоянном отношении ширины полосы фильтра к центральной частоте.

В настоящее время вейвлет-преобразование широко применяется в задачах обработки и кодирования сигналов и изображений самой различной природы (речь, спутниковые изображения, рентгенограммы внутренних органов), распознавания образов, при изучении свойств поверхностей кристаллов и нанообъктов и во многих других случаях.

Вопросы обработки информации с помощью спектральных преобразований в базисе вейвлет практически не освещены в отечественной научной и учебной литературе. В то же время, в западных

[2] Следует отметить, что термин "вейвлет" произошел от английского wavelet, который на русский язык переводится как "короткая волна". В математической литературе понятие "вейвлет" обозначают иногда словом "всплеск", которое, на наш взгляд, сужает само понятие, тем более, что вейвлеты как раз и предназначены для анализа всплесков – сигналов нестационарного характера.

университетах читаются многочасовые курсы по различным аспектам теории и практики вейвлет-преобразования, издаются монографии и уже много лет проводятся научные конференции и семинары. Оперативная информация по вейвлетам располагается на сайте http://www.wavelet.org/. Широкие возможности, которые представляют базисные функции вейвлет в области обработки сигналов, послужили основной причиной появления настоящей книги, которая построена, в основном, на материале зарубежных изданий и, частично, на основе исследований автора.

В.1. Сигналы и их классификация

Сигнал – физический процесс, протекающий во времени и несущий информацию о каком-либо событии, состоянии объекта наблюдения либо передающий команды управления, указания, оповещения и т.п.

Источником сигналов является любая измерительная система, экспериментальная физическая установка, технологическое оборудование, физические и др. явления. Носителем сигнала может быть механическое или звуковое колебание, тепловое, рентгеновское или другое излучение, электрический ток, напряжение или заряд. Однако, в области анализа сигналов, предметом исследований является сигнал как математический объект, представленный в виде некоторой функции, обозначаемой $f(t), g(t), s(t)$ и т.п., где t – независимая переменная любой физической природы (время, перемещение, частота и т.п.). Функции, обозначающие реальный сигнал, всегда вещественные, т.е. являются вещественными функциями вещественных переменных.

Реальные сигналы всегда случайны, так как неслучайный, полностью известный (*детерминированный*) сигнал не может быть носителем новой информации. Поэтому на практике чаще всего приходится иметь дело с *квазидетерминированными* сигналами, которые описываются функциями с

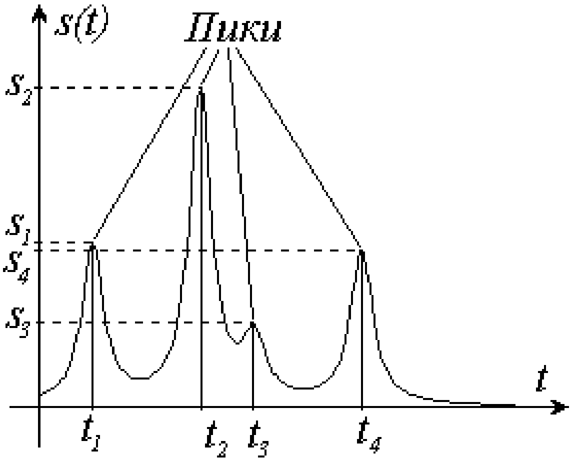

Рис. В.1.
Квазидетерминированный финитный сигнал: случайными являются моменты появления пика $t_1,...,t_n$, его интенсивность (амплитуда) – $s_1,...,s_n$

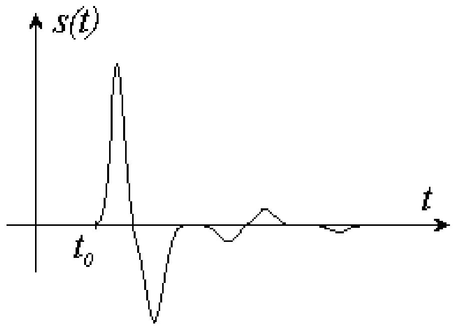

Рис. В.2.
Каузальный сигнал, например, реакция систем на некоторое воздействие в момент t_0

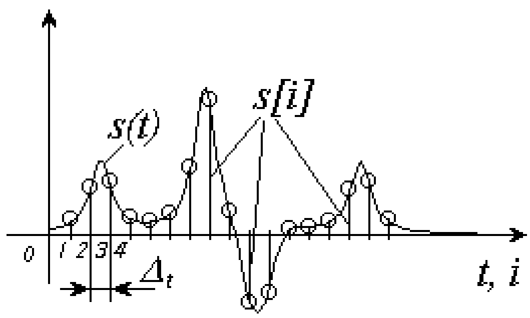

Рис. В.3.
Непрерывный сигнал $s(t)$, его отсчеты $s[i]$

неизвестными, случайными параметрами. Чтобы подчеркнуть наличие случайных параметров в таком сигнале, его записывают, например, в виде $s(t,\theta_0,\theta_1,...)$, где $\theta_0,\theta_1,...$ – некоторые случайные параметры, или $s(t,\theta)$, где $\boldsymbol{\theta}$ – вектор случайных параметров.

Финитным является сигнал, локализованный на некотором конечном интервале времени, т.е. $s(t)\neq 0$ только при $t_{\mathbf{min}}\leq t\leq t_{\mathbf{max}}$, причем при $t\rightarrow t_{min}$ и $t\rightarrow t_{max}$ сигнал плавно стремится к нулю, например, по экспоненциальной кривой или по закону обратно-пропорциональной зависимости. Иногда такие сигналы называют *пиками* (см. рис. В.1).

Каузальным называется сигнал, имеющий начало во времени. Такие сигналы чаще всего являются следствием какой-либо причины. Иногда начало сигнала привязывают к нулевому моменту времени $t_0=0$ (см. рис. В.2).

Непрерывным называется

сигнал, который определен в каждой точке оси времени. В противоположность ему, *дискретным* является сигнал, заданный в фиксированные моменты времени $t_i = i\Delta_t$, где Δ_t – шаг квантования по оси времени. Значения сигнала в эти моменты времени называют *отсчетами* (см. рис. В.3). Дискретные сигналы или функции будем обозначать теми же буквами, что и непрерывные сигналы, заключая дискретный аргумент в квадратные скобки, например, $s[i]$, $f[i]$, $g[i]$ и т.д.

В.2. Модели сигналов

В целом ряде случаев исследователю доступна некоторая априорная информация о сути физических процессов, происходящих в исследуемом явлении, на основании которой может быть составлено представление о виде ожидаемых сигналов: форме, продолжительности, количестве пиков и т.п. Чаще всего при этом удается подобрать аналитическое выражение этому сигналу, называемое *моделью*. Моделью является квазидетерминированный сигнал, который можно выразить в виде известной функции от t с параметрами – $f(t,\theta)$. Численные значения параметров $\boldsymbol{\theta}$ определяют все множество сигналов, описываемых данной моделью. Выбор модели оказывает значительное влияние на достоверность извлекаемой из сигнала информации об исследуемом явлении. Примерами простейших моделей является гауссовая

$$f(t) = A\,\mathbf{exp}\left\{\frac{-(t-t_0)^2}{2\mu_0^2}\right\}$$

или лоренцовая

$$f(t) = A\frac{1}{1+4\left(\dfrac{t-t_0}{\mu_0}\right)^2}$$

кривые, где A, t_0 и μ_0 – интенсивность, положение и ширина модели сигнала (рис. В.4).

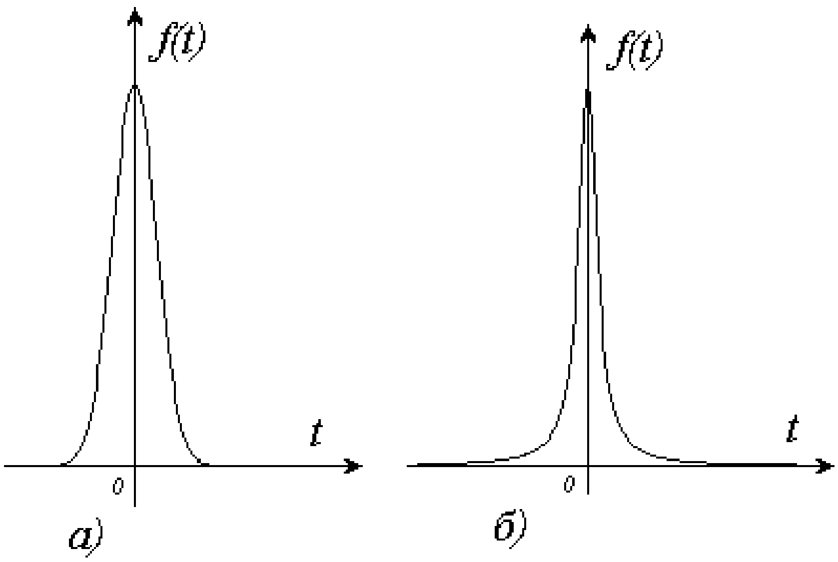

Рис.В.4.
Гауссовая – а) и лоренцовая – б) модели: $a = 1;\ t_0 = 0;\ \mu_0 = 5$

В отличие от функций, обозначающих реальный сигнал, функции, описывающие модели, могут быть как вещественными, так и комплексными, что доставляет исследователям ряд дополнительных возможностей, привлекая соответствующий математический аппарат.

Модели часто используются для проверки свойств системы: по искажению модели можно судить о параметрах системы.

В дальнейшем, если речь идет о сигнале, то будем иметь в виду его модель как некоторую математическую абстракцию, а не физическую сущность.

В.3. Обработка сигнала

Обработкой сигнала называется процесс преобразования и оценивания его информативных характеристик какой-либо технической системой.

Любой сигнал можно охарактеризовать некоторыми обобщенными величинами – *энергией*, *мощностью*, *моментами* или другой функцией, например, *сигнальной автокорреляционной функцией*. Сигнал также можно представить в виде суммы простых колебаний (например, синусоид) и охарактеризовать его набором чисел, называемым *спектром*, определяющим долю каждого колебания в сигнале. Если известна достаточно хорошо модель сигнала, то он тогда характеризуется вектором (набором) параметров $\boldsymbol{\theta}$ этой модели (например, положение на оси времени, амплитуда, ширина, эксцесс и т.п.). Любой параметр сигнала может нести полезную информацию об исследуемом явлении. Таким образом, задачей *обработки* является выбор этих параметров и оценивание их величин, из которых затем извлекается информация об исследуемых процессах.

Процесс обработки можно представить в виде некоторой совокупности действий над сигналом по тем или иным правилам, называемых *алгоритмами*. Очевидно, что желательно выбрать или синтезировать такие алгоритмы, которые приводили бы к желаемому результату с минимальным количеством вычислительных процедур.

Этого можно достичь путем совмещения различных операций, например, процедуры фильтрации базовой линии и шумов с процедурой оценки параметров и т.п. Решение этой задачи требует тщательного подхода при выборе так называемых *весовых функций* линейных операторов обработки. Теория вейвлетов как раз и предоставляет широкий спектр возможностей при выборе таких функций.

Мгновенной мощностью сигнала называют величину

$$p(t) = s^2(t).$$

Мгновенная мощность суммы двух сигналов не равна сумме их мгновенных мощностей, так как

$$\{s_1(t) + s_2(t)\}^2 \neq s_1^2(t) + s_2^2(t).$$

Если функции $s(t)$ или $p(t)$ определяют сигнал в любой момент времени t, то величина энергии или мощности характеризует сигнал за некоторый конечный (или бесконечный) интервал времени $t_1 \le t \le t_2$.

Энергией сигнала на интервале $t_1 \le t \le t_2$ называют величину

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 \, dt. \qquad \text{(В.1)}$$

Средняя мощность сигнала на интервале $T = t_2 - t_1$ определяется как

$$P_{ср} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt.$$

Финитные сигналы иногда характеризуют начальными и центральными моментами, аналогично тому, как характеризуются законы распределения случайных величин.

Начальным моментом ν*-го порядка функции* $s(t)$ *называется интеграл* (если он существует)

$$m_\nu = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} t^\nu s(t) dt, \qquad \text{(В.2)}$$

где m_0 – *нулевой момент*, площадь под кривой $s(t)$

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt.$$

Первый начальный момент – математическое ожидание, абсцисса центра тяжести распределения $s(t)$

$$m_1 = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} ts(t)dt. \qquad \text{(B.3)}$$

Центральным моментом ν-го порядка функции $s(t)$ называется интеграл

$$\overset{o}{m}_\nu = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} (t - m_1)^\nu s(t)dt. \qquad \text{(B.4)}$$

Очевидно, что центральный момент первого порядка равен нулю. Центральный момент второго порядка называется *дисперсией.* Он характеризует рассеивание значений функции $s(t)$ около ее математического ожидания. Центральный момент третьего порядка – характеристика *асимметрии* (скошенности) функции $s(t)$. Центральный момент четвертого порядка характеризует *эксцесс* (остроту) функции $s(t)$. Симметричная кривая распределения $s(t)$ характеризуется нулевой асимметрией, а еще точнее – все моменты нечетного порядка (если они существуют) для симметричной кривой равны нулю.

Два сигнала, описываемые функциями $s_1(t)$ и $s_2(t)$, *ортогональны*, когда их взаимная энергия, определяемая как

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t)dt, \qquad \text{(B.5)}$$

равна нулю.

Взаимная энергия характеризует степень *схожести* двух произвольных сигналов: если они полностью совпадают, то их суммарная энергия максимальна и равна $4E$.

Интегралом свертки (или уравнением свертки) функций $s(t)$ и $h(t)$ называется интеграл, обозначим его $S(t)$,

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau. \qquad \text{(B.6)}$$

Если $h(t)$ – импульсный отклик линейной устойчивой системы, а $s(t)$ – входной сигнал, то выражение (В.6) позволяет определить выходной сигнал $S(t)$. Часто используют символическую запись интеграла (В.6)

$$S(t) = s(t) * h(t). \qquad \text{(В.7)}$$

Автокорреляционной функцией сигнала называется функция, полученная путем свертки сигнала с его зеркальным отображением:

$$K_s(t) = s(t) * s(-t).$$

Или в развернутом виде

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \qquad \text{(В.8)}$$

То есть, автокорреляционная функция образуется путем интегрирования по всей оси времени произведения сигнала и его сдвинутой на время τ копии. Автокорреляционная функция имеет размерность энергии, т.к. при $\tau = 0$ (см. (В.1))

$$K_s(0) = E.$$

Автокорреляционная функция максимальна при $\tau = 0$ и стремится к нулю при $\tau \to \infty$.

Каждому сигналу соответствует определенная автокорреляционная функция, но она характеризует сигнал в среднем, т.к. является результатом интегрирования.

Интеграл

$$K_{sg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t-\tau)dt \qquad \text{(В.9)}$$

носит название взаимнокорреляционной функции. Если функции $s(t)$ и $g(t)$ отличаются друг от друга, то может оказаться, что $K_{sg}(\tau) \cong 0$. Тогда говорят, что они некоррелированы. В противоположном случае сильной корреляционной зависимости функция $K_{sg}(\tau)$ ведет себя аналогично $K_s(\tau)$.

Спектральный анализ – разложение сложного сигнала на некоторое множество простых сигналов (колебаний) с целью определения интенсивности каждого колебания в этом сложном сигнале.

Спектром называется совокупность интенсивностей простых колебаний. Спектр может быть *дискретным*, если между соседними простыми колебаниями определен шаг, равный некоторой конечной величине. Если же такой шаг бесконечно мал, то спектр называется *непрерывным*.

Говорят, что сигнал $s(t)$ имеет дискретный спектр $S[k]$ в базисе $\varphi_k(t)$, если его можно выразить в виде суммы

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[k]\varphi_k(t), \qquad \text{(B.9a)}$$

где $S[k]$ – дискретный спектр сигнала $s(t)$:

$$S[k] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi_k(t)dt. \qquad \text{(B.9б)}$$

Последнее выражение есть не что иное, как дискретная функция взаимной корреляции между сигналом и колебанием $\varphi_k(t)$. Если сигнал или какая-либо его компонента коррелированы с $\varphi_k(t)$, то величина $S[k]$ приобретает максимальное значение. Это позволяет, в частности, совместить операции спектрального анализа и обнаружения компонентов сигнала, коррелированных с базисными функциями $\varphi_k(t)$.

В.4. Историческая справка

История спектрального анализа восходит к И. Бернулли, Эйлеру и, особенно, Фурье, который впервые построил стройную теорию разложения функций в тригонометрические ряды. Однако это разложение, названное именем *Фурье*, долгое время применялось как математический прием и не связывалось с какими-либо физическими представлениями. Например, сам Герц, отец первой электромагнитной резонансной системы (диполя), отрицательно относился к спектральным разложениям. Спектральные представления долгое время применялись и развивались лишь сравнительно узким кругом физиков–теоретиков. Однако, начиная с 20-х годов, в связи с бурным развитием радиотехники и акустики, спектральные разложения приобрели физический смысл и практическое применение. На спектральном (частотном) языке стали объясняться между собой не только ученые, но и инженеры–разработчики радиоаппаратуры, техники, ремонтники – самый широкий круг специалистов.

Впоследствии было установлено, что функции можно разложить не только по синусам и косинусам, но и по другим ортогональным базисным системам, например, полиномам Лежандра и Чебышева, функциям Лагерра и Эрмита. Однако практическое применение они получили только в последние два десятилетия благодаря развитию вычислительной техники и методов синтеза цифровых линейных систем обработки данных. Тем не менее, непосредственно для целей спектрального анализа подобные ортогональные функции не нашли широкого применения из-за трудностей интерпретации получаемых результатов. По тем же причинам не получили развития одно время очень популярные для построения цифровых устройств спектрального анализа функции типа "прямоугольной волны" Хаара, Радемахера, Уолша, Крестенсена. Теоретические исследования ортогональных базисных систем общего вида привели к созданию в 70-х годах *теории обобщенного спектрального анализа*, которая позволила не только по-новому оценить значение классического спектрального анализа Фурье и пределы его практического применения, но и создала методы и критерии синтеза базисных систем наиболее приспособленных для решения конкретной практической задачи.

Иллюстрацией этому является активно развивающаяся с начала 80-х годов *теория базисных функций типа вейвлет*. Здесь мы применяем, так же как и другие исследователи, русское написание английского термина wavelet, так как его дословный перевод "короткая волна" не очень удобен. Благодаря прозрачности физической интерпретации результатов анализа, очень сходной с "частотным" подходом в Фурье-анализе, ортогональный базис вейвлетов сразу стал популярным и эффективным средством анализа нестационарных сигналов и изображений в акустике, сейсмике, медицине и др. областях.

Вейвлет-анализ является разновидностью спектрального анализа, в котором роль простых колебаний играют функции особого рода, называемые вейвлетами.

Итак, базисная функция вейвлет – это некоторое "короткое" солитоноподобное колебание, но не только. Понятие частоты классического спектрального анализа здесь заменено масштабом, и, чтобы перекрыть "короткими волнами" всю временную ось, введен сдвиг функций во времени. Таким образом, базис вейвлетов – это функции типа $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$, где: b – сдвиг, a – масштаб. Кроме того, чтобы быть вейвлетом, функция $\psi(t)$ должна иметь нулевую площадь и, еще лучше, равным нулю первый, второй и т.д. моменты. Фурье-преобразование таких функций равно нулю при $\omega = 0$ и имеет вид полосового фильтра. При различных значениях a это будет набор (блок) полосовых фильтров.

Первое упоминание о подобных функциях (которые вейвлетами еще не назывались) появилось в тезисах Хаара (Haar – 1909). Вейвлет Хаара – это короткое (на интервале $[0,1]$) прямоугольное колебание. Однако он интересен больше теоретически, так как не является непрерывно дифференцируемой функцией и потому имеет длинные "хвосты" в частотной области.

В 30-е годы физик Paul Levy, исследуя броуновское движение, обнаружил, что базис Хаара лучше, чем базис Фурье, для изучения некоторых деталей броуновского движения, тем самым впервые подтвердив эффективность вейвлетов.

Сам термин "вейвлет" использовался ранее в литературе, но свое текущее понятие он получил в статье J. Morlet и A. Grossman, опубликованной в 1984 г. Они занимались исследованиями сейсмических сигналов с помощью базиса, который назвали *вейвлетом*. Эта работа дала начало развитию вейвлетов в течение последующих десяти лет целым рядом авторов: Meyer, Daubechies, Battle, Lemarie и другими; математическая формализация, данная работами Mallat и Meyer, привела к созданию теоретических основ вейвлет-анализа, названного мультиразрешающим анализом (или кратномасштабным анализом – при дословном переводе).

Литература

1.*Grossman A., Morlet J.* Decomposition of Hardy into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V 15. P. 723-736.

2. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Ч.1 и 2.

3. *Френкс Л.* Теория сигналов. М.: Сов.радио, 1974. 343 с.

4. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов.радио, 1972. 351 с.

5. *Залманзон Л.А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара. М.: Наука, 1989. 496 с.

6. *Новиков И.Я.* Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. V. 53. № 6. С.9-13.

7. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, №11. С.1145-1170.

8. *Русинов Л.А., Новиков Л.В.* Спектральный подход к первичной обработке сигналов. Л. Изд. Ленинградского университета, 1984. 156 с.

9. *Mallat S.G.* Multiresolution Approximations and Wavelet of orthonormal Bases of $L^2(R)$ // Transactions of the American Mathematical Society. 1989. Vo. 315, N 1. P. 69-87.

10. *Cohen A., Daubechies I. and Feanveau J.-C.* Biorthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1992. Vol. XLV. P. 485-560.

11. *Burrus C.Sidney, Ramesh A.* Gopinath and Haitao Guo. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. Prentice Hall, New Jersey. 1998. 268 p.

12. *Vetterli Martin, Kovacevic Jelena.* Wavelets and Subband Coding. Prentice Hall, New Jersey. 1995. 430 p.

13. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets // CIAM. Philadelphia PA. 1992. Notes from the 1990 CBMS-NSF Conference on Wavelets and Applications at Lowell, MA.

14. *Daubechies I.* Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Communications on Pure and Applied Mathematics. November, 1988. V. 41. P. 909–926.

15.*Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. 131 с.

16. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 203 с.